CHUYÊN ĐỀ: PHÂN TÍCH ĐA THỨC THÀNH NHÂN TỬ

Dạng 1: Phân tích đa thức thành nhân tử bậc hai, bậc ba, bậc bốn

Phương pháp giải chung

Dùng máy tính nhẩm nghiệm

hoặc tổng các hệ số bằng 0 thì đa thức có 1 nghiệm x=1

Tổng hệ số bậc chẵn bằng tổng hệ số bậc lẻ thì đa thức có 1 nghiệm là x=-1

1 số HĐT đáng nhớ:

1, $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab=(a-b)^2+4ab$

2, $(a-b)^2=a^2+b^2-2ab=(a+b)^2-4ab$

3, $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=(a-b)^2+2ab$

4, $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)=(a+b)^3-3ab(a+b)$

5, $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)=(a-b)^3+3ab(a-b)$

6, $2(a^2+b^2)=(a+b)^2+(a-b)^2$

7, $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$

8, $a^4+b^4=(a+b)(a-b)\left[(a+b)^2-2ab\right]$

9, $a^4+b^4=\left[(a+b)^2-2ab\right]^2-2(ab)^2$.

10, $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$.

11, $a^4+a^2b^2+b^4=(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$.

12, $a^4+a^2+1=(a^2+a+1)(a^2-a+1)$.

Dạng 1.1: Phân tích đa thức thành nhân tử bậc hai

Cách 1:Tách hạng tử bậc nhất bx

Tính a.c rồi phân tích a.c ra tích của hai thừa số ac = a_1c_1 = a_2c_2 = ...

Chọn ra hai thừa số có tổng bằng b , chẳng hạn : ac = a_1c_1 với $a_1 + c_1 = b$

Tách bx = $a_1x + c_1x$

Dùng phương pháp nhóm số hạng để phân tích tiếp

Cách 2:Tách hạng tử bậc ax^2

Ta thường làm làm xuất hiện hằng đẳng thức: $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

Cách 3:Tách hạng tử tự do c

Ta tách c thành c_1 và c_2để dùng phương pháp nhóm hạng tử hoặc tạo ra hằng đẳng thức bằng cách c_1 nhóm với ax^2 còn c_2 nhóm với bx.

Bài 1: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a. $3x^2+8x+4$

HD:

Ta có: 3.4 = 12 = 2.6 , mà 2 + 6 = 8

Nên ta được: $3x^2+8x+4=3x^2+6x+2x+4=(3x+2)(x+2)$

b. $3x^2-8x+4$

HD:

Cách 1: Tách hạng tử thứ 2:

$$3x^2-8x+4=3x^2-6x-2x+4=3x(x-2)-2(x-2)=(x-2)(3x-2)$$

Cách 2: Tách hạng tử thứ nhất: $3x^2-8x+4=(4x^2-8x+4)-x^2=(x-2)(3x-2)$

c. $x^2-11x+8$

HD: $x^2-11x+28=(x-4)(x-7)$

d. $x^2+5x-24$

HD: $x^2+5x-24=(x+8)(x-3)$

e. x^2-5x+4

HD: $x^2-5x+4=(x-1)(x-4)$

f)$3x^2 – 7x + 2$;

HD:

$3x^2 - 7x + 2 = 3x^2 - 6x - x + 2 =$

$= 3x(x -2) - (x - 2)$

$= (x - 2)(3x - 1).$

Bài 2: Phân tích các đa thức thành nhân tử: $3x^2+8x+4$

HD:

Ta có: $3x^2+8x+4=\left(4x^2+8x+4\right)-x^2=\left(2x+2\right)^2-x^2=\left(x+2\right)\left(3x+2\right)$

Bài 3: Phân tích các đa thức thành nhân tử:

a) $3x^2+8x+4$

HD:

$3x^2+8x+16-12=\left(3x^2-12\right)+\left(x+16\right)=\left(x+2\right)\left(3x+2\right)$

b) $4x^2-4x-3$

HD:

$4x^2-4x-3=\left(4x^2-4x+1\right)-4=\left(2x-1\right)^2-2^2=\left(2x+1\right)\left(2x-3\right)$

c) $9x^2+12x-5$

HD:

$9x^2+12x-5=\left(9x^2+12x+4\right)-9=\left(3x+2\right)^2-3^2=\left(3x+5\right)\left(3x-1\right)$

Bài 4: Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^2-x-2001.2002$

HD:

Ta có: $x^2-x-2001\left(2001+1\right)=x^2-x+2001^2-2001=\left(x^2-2001^2\right)-\left(x+2001\right)$

$\left(x-2011\right)\left(x+2011\right)-\left(x+2011\right)=\left(x+2011\right)\left(x-2012\right)$

Bài 5: Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^2-x+2017.2018$

HD :

Ta có: $x^2-x+2017.2018=x^2+2017x-2018x+2017.2018=\left(x+2017\right)\left(x-2018\right)$

Dạng 1.2: Phân tích đa thức thành nhân tử bậc ba

Chú ý:

Nếu f(x) có tổng các hệ số bằng 0 thì f(x) có một nhân tử là x – 1

Nếu f(x) có tổng các hệ số của các hạng tử bậc chẵn bằng tổng các hệ số của các hạng tử bậc lẻ thì f(x) có một nhân tử là x + 1

Bài 1: Phân tích đa thức thành nhân tử: $a^3+4a^2-29a+24$

HD:

Bấm máy nhận thấy đa thức có ba nghiệm là 1,3 và -8, nên sẽ có chứa các nhân tử (a - 1), (a - 3) và (a + 8),

Ta có: $a^3+4a^2-29a+24=\left(a^3-a^2\right)+\left(5a^2-5a\right)+\left(-24a+24\right)$

$a^2\left(a-1\right)+5a\left(a-1\right)-24\left(a-1\right)=\left(a-1\right)\left(a^2+5a-24\right)=\left(a-1\right)\left(a-3\right)\left(a+8\right)$

Bài 2: Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^3+6x^2+11x+6$

HD :

Bấm máy ta thấy đa thức có ba nghiệm nguyên là -1, -2, -3, nên ta phân tích :

$x^3+6x^2+11x+6=\left(x+1\right)\left(x+2\right)\left(x+3\right)$

Bài 3: Phân tích đa thức thành nhân tử: $3x^3-7x^2+17x-5$

HD :

Bấm máy tính cho ta có nghiệm là $x=\frac{1}{3}$, nên có nhân tử là : (3x - 1)

nên ta có : $3x^3-7x^2+17x-5=3x^3-x^2-6x^2+2x+15x-5$

$=x^2\left(3x-1\right)-2x\left(3x-1\right)+5\left(3x-1\right)=\left(3x-1\right)\left(x^2-2x+5\right)$

Bài 4: Phân tích đa thức thành nhân tử: $2x^3-5x^2+8x-3$

HD :

Bấm máy tính cho ta có nghiệm là $x=\frac{1}{2}$, nên có nhân tử là : (2x - 1)

Nên ta có : $2x^3-5x^2+8x-3=2x^3-x^2-4x^2+2x+6x-3$

$=x^2\left(2x-1\right)-2x\left(2x-1\right)+3\left(2x-1\right)=\left(2x-1\right)\left(x^2-2x+3\right)$

Bài 5: Phân tích đa thức thành nhân tử: $3x^3-14x^2+4x+3$

HD :

Bấm máy tính cho ta nghiệm là : $x=\frac{-1}{3}$ nên có 1 nhân tử là : (3x + 1)

Ta có : $3x^3-14x^2+4x+3=3x^3+x^2-15x^2-5x+9x+3$

$x^2(3x+1)-5x(3x+1)+3(3x+1)=(3x+1)(x^2-5x+3)$

Bài 6: Phân tích đa thức thành nhân tử: x^3+5x^2+8x+4

HD :

Cách 1 : bấm máy tính cho ta nghiệm là : x= -1 và x= -2

Như vậy ta có : $x^3+5x^2+8x+4=(x+1)(x+2)^2$

Cách 2 : Nhận xét : Tổng các hệ số của hạng tử bậc chẵn bằng tổng các hệ số của hạng tử bậc lẻ nên đa thức có một nhân tử là: x + 1

Như vậy ta có : $x^3+5x^2+8x+4=(x^3+x^2)+(4x^2+4x)+(4x+4)=(x+1)(x+2)^2$

Bài 7: Phân tích đa thức thành nhân tử: x^3-x^2-4

HD :

Ta nhận thấy nghiệm của f(x) nếu có thì $x=\pm1,\pm2\pm4.$ Chỉ có f(2) = 0 nên x = 2 là nghiệm của f(x) nên f(x) có một nhận tử là x – 2.

Do đó ta tách f(x) thành các nhóm có xuất hiện một nhân tử là x – 2

Cách 1: $x^3-x^2-4=(x^3-2x^2)+(x^2-2x)+(2x-4)=(x-2)(x^2+x+2)$

Cách 2: $x^3-x^2-4=x^3-8-x^2+4=(x^3-8)-(x^2-4)=(x-2)(x^2+x+2)$

Bài 8: Phân tích đa thức $P(x) = x^3 – 2x – 4$ thành nhân tử .

HD:

Ta nhận thấy đa thức $P(x) = x^3 – 2x – 4$ có số nghiệm là x = 2

Do đó, ta có P(x) = (x – 2)Q(x)

Chia đa trhức $P(x) = x^3 – 2x – 4$ cho nhị thức x – 2 , ta được thương số là

$Q(x) = x^2 + 2x +2 = (x + 1)^2 +1$

Suy ra $P(x) = (x – 2)(x^2 + 2x + 2)$

Vậy $P(x) = x^3 – 2x – 4 = (x- 2)(x^2 + 2x + 2)$

Bài 9: Phân tích đa thức thành nhân tử:

a) x^3+x^2+4

HD :

Ta có các ước của 4 là: $\pm1;\pm2;\pm4$

Nhận thấy x = -2 là nghiệm của đa thức vậy đa thức có 1 nhân tử là: x – (-2) = x + 2

$$\Rightarrow x^3+2x^2-x^2+4=(x+2)\underbrace{(x^2-x+2)}_{>0}$$

Hoặc: $=(x^3+8)+(x^2-4)=(x+2)(x^2-x+2)$

b) x^3-5x^2+8x-4

HD :

Nhận thấy x = -1 là nghiệm của đa thức nên có 1 nhân tử là: x + 1

$$x^3-5x^2+8x-4=(x^3-x^2)-(4x^2-4x)+(4x-4)=(x-1)(x-2)^2$$

c) $x^3-19x-30$

HD :

Ta có x = -3 là nghiệm nên có nhân tử là x +3

$$x^3-19x-30=x^3+3x^2-3x^2-9x-10x-30=(x+3)(x^2-3x-10)=(x+3)(x+2)(x-5)$$

d) $x^3+4x^2-7x-10$

HD :

Ta có: x = -1 là nghiệm của đa thức nên có nhân tử là: x +1

$$x^3+4x^2-7x-10=x^3+x^2+3x^2+3x-10x-10=(x+1)(x-2)(x+5)$$

e) $3x^3-7x^2+17x-5$

HD:

Các ước của 5 là: $\pm1;\pm5$. Nhận thấy đa thức không có nghiệm nguyên, ta đi tìm nghiệm hữu tỷ của đa thức

$$x=\frac{p}{q}\Leftrightarrow\begin{cases}p\in U(-5)\\q\in U(3)\end{cases}$$

Ta thấy nghiệm của đa thức là $x=\frac{1}{3}$ nên có nhân tử $x-\frac{1}{3}$ hay 3x -1

Vậy: $3x^3-7x^2+17x-5=3x^3-x^2-6x^2+2x+15x-5=(3x-1)(x^2-2x+5)$

Bài 10: Phân tích đa thức thành nhân tử: $2x^3-3x^2(x^2-x+1)+(x^2-x+1)^3$

HD :

$$2x^3-3x^2(x^2-x+1)+(x^2-x+1)^3=2x^3-3x^2y+y^3=2x^2(x-y)-y(x-y)(x+y)=(x-y)(2x^2-y^2-xy)$$
$$=(x-y)(x-y)(2x+y)=(x-y)^2(2x+y)$$

Bài 11: Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^3 - 5x^2 + 8x - 4$

HD :

$x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = x^3 - 4x^2 + 4x - x^2 + 4x - 4$

$= x(x^2 - 4x + 4) - (x^2 - 4x + 4)$

$= (x - 1) (x - 2)^2$

Bài 12: Phân tích đa thức thành nhân tử: x^3+5x^2+8x+4

HD :

Dạng 1.3: Phân tích đa thức thành nhân tử bậc bốn

Chú ý: $P(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e\left[\frac{e}{a}=(\frac{d}{b})^2\right](a\neq 0)$

Cách giải: $P(x)=x^2[(ax^2+\frac{e}{x^2})+(bx+\frac{d}{x})+c]=x^2[a(x^2+\frac{e}{a.x^2})+b(x+\frac{d}{bx})+c]$

Đặt $t=x+\frac{d}{bx}\Rightarrow t^2=x^2+2\frac{d}{b}+(\frac{d}{b})^2.\frac{1}{x^2}=...$

Bài 1: Phân tích thành nhân tử: $P(x) = 6x^4 + 19x^2 + 15$

HD:

Đặt $y = x^2$,có $Q(y) = 6y^2 + 19y + 15$

Tìm m, n sao cho m.n = 90 và m + n = 19 với m < 19, n < 19

Vì 90 = 6.15 = 9.10 nên chọn m = 9, n = 10, ta có:

$6y^2 + 19y + 15 = 6y^2 + 9y + 10y + 15$

$= 3y(2y + 3) + 5(2y +3)$

$= (2y + 3)(3y + 5)$

Do đó $P(x) = 6x^4 + 19x^2 + 15 = (2x^2 + 3)(3x^2 + 5)$

Bài 2: Phân tích $P(x) = 2x^4 + 3x^3 – 9x^2 – 3x + 2$ thành nhân tử.

HD:

Đa thức dạng: $P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + kbx + a$ với $k = 1$ hoặc $k = -1$

Cách giải: Đặt $y = x^2 + k$ và biến đổi P(x) về dạng chứa hạng tử $ay^2 + bxy$ rồi sử dụng HĐT

Giải: Đặt $y = x^2 – 1$ suy ra $y^2 = x^4 – 2x^2 + 1$

Biến đổi $P(x) = 2(x^4 – 2x^2 + 1) + 3x^3 – 5x^2 – 3x$

$= 2(x^2 – 1)^2 + 3x(x^2 – 1) – 5x$

Từ đó $Q(y) = 2y^2 + 3xy – 5x^2$

Tìm m, n sao cho $m.n = - 10x^2$ và $m + n = 3x$ chọn $m = 5x$, $n = - 2x$

Ta có : $Q(y) = 2y^2 + 3xy – 5x^2$

$= 2y^2 – 2xy + 5xy – 5x^2$

$= 2y(y – x) + 5x(y – x)$

$= (y – x)(2y – 5x)$

Do đó , $P(x) = (x^2 – x – 1)(2x^2 + 5x – 2)$.

Bài 3: Phân tích $P(x) = x^4 - x^3 – 10x^2 + 2x + 4$ thành nhân tử.

HD:

Đa thức dạng: $P(x) = x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ với $e = d^2/b^2$

Cách giải: Đặt biến phụ $y = x^2 + d/b$ và biến đổi P(x) về dạng chứa hạng tử $y^2 + bxy$ rồi sử dụng HĐT

Giải: Dễ thấy $b = 1$, $d = 2$, $e = 4$ đặt $y = x^2 – 2$ suy ra $y^2 = x^4 – 4x^2 + 4$

Biến đổi $P(x) = x^4 – 4x^2 + 4 – x^3 – 6x^2 + 2x$

$= (x^2 - 2)^2 - x(x^2 - 2) - 6x^2$

Từ đó $Q(y) = y^2 - xy - 6x^2$

Tìm m, n sao cho $m.n = -6x^2$ và $m + n = -x$ chọn $m = 2x$, $n = -3x$

Ta có $Q(y) = y^2 + 2xy - 3xy - 6x^2$

$= y(y + 2x) - 3x(y + 2x)$

$= (y + 2x)(y - 3x)$

Do dó, $P(x) = (x^2 + 2x - 2)(x^2 - 3x - 2)$.

Nếu đa thức P(x) có chứa ax^4 thì có thể xét đa thức Q(x) = P(x)/a theo cách trên.

Bài 4: Phân tích đa thức sau thành nhân tử. $P(x) = x^4 + x^3 - 2x^2 - 6x - 4$

HD:

Ta nhận thấy đa thức P(x) có 2 nghiệm phân biệt là -1 và 2

Vì P(-1) = 0 và P(2) = 0

Do đó $P(x) = (x - 1)(x - 2)Q(x)$

Chia đa thức P(x) cho tam thức $(x + 1)(x - 2) = x^2 - x - 2$, ta được thương đúng của phép chia là: $Q(x) = x^2 + 2x + 2 = (x + 1)^2 + 1$

Suy ra: $P(x) = (x + 1)(x - 2)(x^2 + 2x + 2)$

Vậy : $P(x) = (x + 1)(x - 2)(x^2 + 2x + 2)$.

Bài 5: Phân tích đa thức $f(x) = 4x^3 - 13x^2 + 9x - 18$ thành nhân tử

HD:

Các ước của 18 là ± 1, ± 2, ± 3, ± 6, ± 9, ± 18.

f(1) = –18, f(–1) = –44, nn ± 1 khơng phải l nghiệm của f(x).

Dễ thấy khơng l số nguyn nn –3, ± 6, ± 9, ± 18 khơng l nghiệm của f(x). Chỉ cịn –2 v 3. Kiểm tra ta thấy 3 l nghiệm của f(x). Do đó, ta tách các hạng tử như sau :

$f(x) = 4x^3 - 12x^2 - x^2 + 3x + 6x - 18$

$= 4x^2(x-3) - x(x-3) + 6(x-3)(0)$

$= (x-3)(4x^2 - x + 6)$

Bài 6: Phân tích đa thức thành nhân tử:

a) $2x^4 - 21x^3 - 30x^2 - 105x + 50$ b. $x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 3x + 1$

c) $x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x + 1 (x \neq 0)$

HD:

a. $P(x) = 2x^4 - 21x^3 - 30x^2 - 105x + 50$

$$P(x) = x^2(2x^2 - 30 - 21x - \frac{105}{x} + \frac{50}{x^2}) = x^2[2(x^2 + \frac{25}{x^2}) - 21(x + \frac{5}{x}) - 30]$$

Đặt $t = x + \frac{5}{x} \Rightarrow t^2 = x^2 + \frac{25}{x^2} + 2.x.\frac{5}{x} \Rightarrow x^2 + \frac{25}{x^2} = t^2 - 10$

$$G(t) = 2(t^2 - 10) - 21t - 30 = 2t^2 - 21t - 50 = (t+2)(2t-25)$$

$$P(x) = x^2[2(x + \frac{5}{x}) - 25][(x + \frac{5}{x}) + 2] = (2x^2 - 25x + 10)(2x^2 + 2x + 5)$$

b. $x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 3x + 1 [(\frac{d}{b})^2 = (\frac{3}{-3})^2 = 1 = \frac{e}{a}]$

$$P(x) = x^2(x^2 - 3x - 6 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}) = x^2[(x^2 + \frac{1}{x^2}) - 3(x - \frac{1}{x}) - 6]$$

Đặt $x - \frac{1}{x} = t \Rightarrow t^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} - 2 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 + 2$; $G(t) = t^2 + 2 - 3t - 6 = t^2 - 3t - 4 = (t+1)(t-4)$

$$P(x) = x^2(x - \frac{1}{x} + 1)(x - \frac{1}{x} - 4) = (x^2 + x - 1)(x^2 - 4x - 1)$$

c. $x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x + 1 (x \neq 0)$

$$x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x + 1 = x^2\left(x^2 + 6x + 7 - \frac{6}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = x^2\left[\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 6\left(x - \frac{1}{x}\right) + 7\right]$$

Đặt $y=x-\frac{1}{x}\Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=y^2+2\Rightarrow A=x^2\left(y^2+2+6y+7\right)=x^2\left(y+3\right)^2=\left(xy+3x\right)^2$

$=\left[x\left(x-\frac{1}{x}\right)+3x\right]^2=\left(x^2+3x-1\right)^2$

Bài 7: Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^4+6x^3+7x^2-6x+1$

HD:

Nhận thấy đa thức bậc 4 này không dùng được máy tính

Và đa thức không có hai nghiệm là 1 và -1

Tuy nhiên đa thức lại có hệ số cân xứng nhau:

Nên ta làm như sau:

$$x^4+6x^3+7x^2-6x+1=x^2\left(x^2+6x+7+\frac{-6}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=x^2\left(x^2+\frac{1}{x^2}+6\left(x-\frac{1}{x}\right)+7\right)$$

Đặt $x-\frac{1}{x}=t\Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=t^2+2$

Đa thức trở thành : $x^2\left(t^2+2+6t+7\right)=x^2\left(t^2+6t+9\right)=x^2\left(t+3\right)^2$

Thay t trở lại ta được : $x^2\left(x-\frac{1}{x}+3\right)^2=x^2\left(\frac{x^2-1+3x}{x}\right)^2=(x^2+3x-1)^2$

Vậy $x^4+6x^3+7x^2-6x+1=\left(x^2+3x-1\right)^2$

Bài 8: Phân tích đa thức thành nhân tử: x^4+2x^2+1

HD :

Nhận thấy ngay đa thức trên là hằng đẳng thức nên ta có :

$$x^4+2x^2+1=\left(x^2+1\right)^2$$

Bài 9: Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^4+6x^3+7x^2-6x+1$

HD :

Nhận thấy đa thức bậc 4 này không dùng được máy tính

và đa thức không có hai nghiệm là 1 và -1

Tuy nhiên đa thức lại có hệ số cân xứng nhau:

nên ta làm như sau:

$$x^4+6x^3+7x^2-6x+1=x^2\left(x^2+6x+7+\frac{-6}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=x^2\left(x^2+\frac{1}{x^2}+6\left(x-\frac{1}{x}\right)+7\right)$$

Đặt $x-\frac{1}{x}=t\Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=t^2+2$ Đa thức trở thành : $x^2\left(t^2+2+6t+7\right)=x^2\left(t^2+6t+9\right)=x^2\left(t+3\right)^2$

Thay t trở lại ta được :

$$x^2\left(x-\frac{1}{x}+3\right)^2=x^2\left(\frac{x^2-1+3x}{x}\right)^2=(x^2+3x-1)^2$$

Vậy $x^4+6x^3+7x^2-6x+1=\left(x^2+3x-1\right)^2$

Bài 10: Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^4+6x^3-11x^2+6x+1$

HD :

Nhận thấy đa thức bậc 4 này không dùng được máy tính

và đa thức không có hai nghiệm là 1 và -1

Tuy nhiên đa thức lại có hệ số cân xứng nhau:

nên ta làm như sau:

$$x^4+6x^3+7x^2+6x+1=x^2\left(x^2+6x+7+\frac{6}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=x^2\left(x^2+\frac{1}{x^2}+6\left(x+\frac{1}{x}\right)+7\right)$$

Đặt $x+\frac{1}{x}=t=>x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2$. Đa thức trở thành :

$$x^2\left(t^2-2+6t+7\right)=x^2\left(t^2+6t+5\right)=x^2(t+1)(t+5)$$

Thay t trở lại ta được :

$$x^2\left(x+\frac{1}{x}+1\right)\left(x+\frac{1}{x}+5\right)=x^2\left(\frac{x^2+1+x}{x}\right)\left(\frac{x^2+1+5x}{x}\right)=\left(x^2+x+1\right)\left(x^2+5x+1\right)$$

Vậy $x^4+6x^3+7x^2-6x+1=\left(x^2+x+1\right)\left(x^2+5x+1\right)$

Bài 11: Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^4+x^3+2x^2+x+1$

HD :

$$(x^4+x^3+x^2)+(x^2+x+1)=x^2(x^2+x+1)+(x^2+x+1)=(x^2+x+1)(x^2+1)$$

Bài 12: Phân tích đa thức thành nhân tử: $6a^4+7a^3-37a^2-8a+12$

HD :

Nhẩm thấy đa thức có nghiệm là x=2, hay có 1 nhân tuer là x - 2

Ta có :

$$6a^4+7a^3-37a^2-8a+12=(6a^4-12a^3)+(19a^3-38a^2)+\left(a^2-2a\right)-(6a-12)$$

$$6a^3(a-2)+19a^2(a-2)+a(a-2)-6(a-2)=(a-2)\left(6a^3+19a^2+a-6\right)$$

$$=(a-2)(a+3)(2a-1)(3a+2)$$

Bài 13: Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^4+6x^3+13x^2+12x+4$

HD :

Thấy tổng các hệ số bậc chẵn bằng tổng hệ số bậc lẻ, nên đa thức có 1 nghiệm bằng -1

Ta có : $x^4+6x^3+13x^2+12x+4=\left(x^4+x^3\right)+\left(5x^3+5x^2\right)+\left(8x^2+8x\right)+\left(4x+4\right)$

$= x^3\left(x+1\right)+5x^2\left(x+1\right)+8x\left(x+1\right)+4\left(x+1\right)=\left(x+1\right)\left(x^3+5x^2+8x+4\right)$

$= \left(x+1\right)^2\left(x+2\right)^2$

Bài 14: Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^4+10x^3+26x^2+10x+1$

HD :

$$x^4+10x^3+26x^2+10x+1=x^2\left(x^2+10x+26+\frac{10}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=x^2\left(x^2+\frac{1}{x^2}+10\left(x-\frac{1}{x}\right)+26\right)$$

Đặt $x+\frac{1}{x}=t=>x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2$ Đa thức trở thành :

$$x^2\left(t^2-2+10t+26\right)=x^2\left(t^2+10t+24\right)=x^2\left(t+4\right)\left(t+6\right)$$

Thay t trở lại ta được :

$$x^2\left(x+\frac{1}{x}+4\right)\left(x+\frac{1}{x}+6\right)=x^2\left(\frac{x^2+4x+1}{x}\right)\left(\frac{x^2+6x+1}{x}\right)=\left(x^2+4x+1\right)\left(x^2+6x+1\right)$$

Vậy $x^4+10x^3+26x^2+10x+1=\left(x^2+4x+1\right)\left(x^2+6x+1\right)$

Bài 15: Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^4+x^3-4x^2+x+1$

HD :

$$x^4+x^3-4x^2+x+1=x^2\left(x^2+x-4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=x^2\left(x^2+\frac{1}{x^2}+\left(x+\frac{1}{x}\right)-4\right)$$

Đặt $x+\frac{1}{x}=t=>x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2$ Đa thức trở thành :

$$x^2\left(t^2-2+t-4\right)=x^2\left(t^2+t-6\right)=x^2\left(t-2\right)\left(t+3\right)$$

Thay t trở lại ta được :

$$x^2\left(x+\frac{1}{x}-2\right)\left(x+\frac{1}{x}+3\right)=x^2\left(\frac{x^2-2x+1}{x}\right)\left(\frac{x^2+3x+1}{x}\right)=\left(x-1\right)^2.\left(x^2+3x+1\right)$$

Vậy $x^4+x^3-4x^2+x+1=\left(x-1\right)^2\left(x^2+3x+1\right)$

Bài 16: Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^4-7x^3+14x^2-7x+1$

HD :

$$x^4-7x^3+14x^2-7x+1=x^2\left(x^2-7x+14+\frac{-7}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=x^2\left(x^2+\frac{1}{x^2}-7\left(x+\frac{1}{x}\right)+14\right)$$

Đặt $x+\frac{1}{x}=t \Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2$ Đa thức trở thành :

$$x^2\left(t^2-2-7t+14\right)=x^2\left(t^2-7t+12\right)=x^2(t-3)(t-4)$$

Thay t trở lại ta được :

$$x^2\left(x+\frac{1}{x}-3\right)\left(x+\frac{1}{x}-4\right)=x^2\left(\frac{x^2-3x+1}{x}\right)\left(\frac{x^2-4x+1}{x}\right)=\left(x^2-3x+1\right).\left(x^2-4x+1\right)$$

Vậy $x^4-7x^3+14x^2-7x+1=\left(x^2-3x+1\right)\left(x^2-4x+1\right)$

Bài 17: Phân tích đa thức thành nhân tử: x^4+x^3-x-1

HD:

Ta có tổng các hệ số bằng 0 và tổng chẵn cũng bằng tổng lẻ nên có nhân tử x^2 -1

$$x^4+x^3-x-1=(x^4-1)+(x^3-x)=(x-1)(x+1)(x^2+x+1)$$

$$x^4+x^3-x-1=(x^4+x^3)-(x-1)=(x-1)(x+1)(x^2+x+1)$$

Bài 18: Phân tích đa thức thành nhân tử: $2x^4-5x^3-5x^2+5x+3$

HD :

Ta có tổng chẵn bằng tổng lẻ nên có nhân tử: x + 1, sau đó lại tổng chẵn bằng tổng lẻ.

$$2x^4-5x^3-5x^2+5x+3=(x-1)(x+1)(x-3)(2x+1)$$

Bài 19: Phân tích đa thức thành nhân tử: $9x^4+15x^3+43x^2+22x-40$

HD:

Ta thấy đa thức có 1 nhân tử là: $x-\frac{2}{3}\Leftrightarrow 3x-2$

$$9x^4+15x^3+43x^2+22x-40=(3x-2)(3x^3+7x^2+19x+20)$$

Lại có nhân tử là: 3x + 4 $\Rightarrow (3x-2)(3x^3+7x^2+19x+20)=(3x-2)(3x+4)(x^2+x+5)$

Bài 20: Phân tích đa thức thành nhân tử: $6x^4+x^3+19x^2-31x-30$

HD:

$$6x^4+x^3+19x^2-31x-30=(2x-3)(3x+2)(x^2+x+5)$$

Bài 21: Phân tích đa thức thành nhân tử: x^4-5x^2+4

HD:

Đặt $t=x^2$, ta được: $t^2-5t+4=(t-1)(t-4)=(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$

Bài 22: Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^4+10x^3+26x^2+10x+1$

HD :

$$x^4+10x^3+26x^2+10x+1=x^2\left(x^2+10x+26+\frac{10}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=x^2\left(x^2+\frac{1}{x^2}+10\left(x-\frac{1}{x}\right)+26\right)$$

Đặt $x+\frac{1}{x}=t\Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2$ Đa thức trở thành :

$$x^2\left(t^2-2+10t+26\right)=x^2\left(t^2+10t+24\right)=x^2(t+4)(t+6)$$

Thay t trở lại ta được :

$$x^2\left(x+\frac{1}{x}+4\right)\left(x+\frac{1}{x}+6\right)=x^2\left(\frac{x^2+4x+1}{x}\right)\left(\frac{x^2+6x+1}{x}\right)=\left(x^2+4x+1\right)\left(x^2+6x+1\right)$$

Vậy $x^4+10x^3+26x^2+10x+1=\left(x^2+4x+1\right)\left(x^2+6x+1\right)$

Bài 23 : Phân tích đa thức thành nhân tử : $x^4-7x^3+14x^2-7x+1$

HD :

$$x^4-7x^3+14x^2-7x+1=x^2\left(x^2-7x+14+\frac{-7}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=x^2\left(x^2+\frac{1}{x^2}-7\left(x+\frac{1}{x}\right)+14\right)$$

Đặt $x+\frac{1}{x}=t\Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2$ Đa thức trở thành :

$$x^2\left(t^2-2-7t+14\right)=x^2\left(t^2-7t+12\right)=x^2(t-3)(t-4)$$

Thay t trở lại ta được :

$$x^2\left(x+\frac{1}{x}-3\right)\left(x+\frac{1}{x}-4\right)=x^2\left(\frac{x^2-3x+1}{x}\right)\left(\frac{x^2-4x+1}{x}\right)=\left(x^2-3x+1\right).\left(x^2-4x+1\right)$$

Vậy $x^4-7x^3+14x^2-7x+1=\left(x^2-3x+1\right)\left(x^2-4x+1\right)$

Bài 24 : Phân tích đa thức thành nhân tử : $x^4+x^3-4x^2+x+1$

HD:

$$x^4+x^3-4x^2+x+1=x^2\left(x^2+x-4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=x^2\left(x^2+\frac{1}{x^2}+\left(x+\frac{1}{x}\right)-4\right)$$

Đặt $x+\frac{1}{x}=t\Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2$ Đa thức trở thành :

$$x^2\left(t^2-2+t-4\right)=x^2\left(t^2+t-6\right)=x^2(t-2)(t+3)$$

Thay t trở lại ta được :

$$x^2\left(x+\frac{1}{x}-2\right)\left(x+\frac{1}{x}+3\right)=x^2\left(\frac{x^2-2x+1}{x}\right)\left(\frac{x^2+3x+1}{x}\right)=(x-1)^2.\left(x^2+3x+1\right)$$

Vậy $x^4+x^3-4x^2+x+1=(x-1)^2\left(x^2+3x+1\right)$

Bài 25: Phân tích đa thức thành nhân tử: $4x^4-8x^3+3x^2-8x+4$

HD :

$$4x^4-8x^3+3x^2-8x+4=4(x^4+1)-8x(x^2+1)+3x^2=4(x^2+1)^2-8x(x^2+1)-5x^2=4y^2-8xy-5x^2$$

$$=4y^2+2xy-10xy-5x^2=(2y+x)(2y-5x)=(2x^2+x+2)(2x^2-5x+2)=(2x^2+x+2)(x-2)(2x-1)$$

Bài 26: Phân tích đa thức thành nhân tử: $2x^4-15x^3+35x^2-30x+8$

HD :

$$2x^4-15x^3+35x^2-30x+8=2(x^4+4)-15x(x^2+2)+35x^2=2(x^2+x)^2-15(x^2+2)+27x^2$$
$$=2y^2-15y+27x^2$$
$$=(y-3x)(2y-9x)=(x^2-3x+2)(2x^2-9x+4)=(x-1)(x-2)(x-4)(2x-1)$$

Bài 27: Phân tích đa thức thành nhân tử: $4x^4-4x^3-7x^2-4x+4$

HD : $4x^4-4x^3-7x^2-4x+4=(x-2)(2x-1)(2x^2+3x+2)$

Bài 28: Phân tích đa thức thành nhân tử: $A(x)=2x^4-19x^3+2002x^2-9779x+11670$

HD :

Ta nhận thấy đa thức có hai nhân tử là x - 2 và x - 3

$$A(x)=(x-2)(x-3)(ax^2+bx+c)\Rightarrow a=2;c=1945;b=-9\Rightarrow A(x)=(x-2)(x-3)(2x^2-9x+1945)$$

Bài 29: Phân tích đa thức thành nhân tử: $P(x)=2x^4-7x^3-2x^2+13x+6$

HD:

$$P(x)=2x^4-7x^3-2x^2+13x+6$$

$$=2x^4-6x^3-x^3+3x^2-5x^2+15x-2x+6$$

$$=2x^3(x-3)-x^2(x-3)-5x(x-3)-2(x-3)$$

$$=(x-3)(2x^3-x^2-5x-2)$$

$$=(x-3)(2x^3-4x^2+3x^2-6x+x-2)$$

$=(x-3)\left[2x^2(x-2)+3x(x-2)+(x-2)\right]$

$=(x-3)(x-2)\left(2x^2+3x+1\right)$

$=(x-3)(x-2)\left(2x^2+2x+x+1\right)$

$=(x-3)(x-2)\left[2x(x+1)+(x+1)\right]$

$=(x-3)(x-2)(x+1)(2x+1)$

Bài 30: Phân tích đa thức thành nhân tử: $E=x^4+2017x^2+2016x+2017$.

HD:

$$E=x^4+2017x^2+2016x+2017=\left(x^4-x\right)+2017x^2+2017x+2017$$
$$=\left(x^4-x\right)+2017\left(x^2+x+1\right)$$
$$=x\left(x^3-1\right)+2017\left(x^2+x+1\right)$$
$$=x(x-1)\left(x^2+x+1\right)+2017\left(x^2+x+1\right)$$
$$=\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+2017\right)$$

Bài 31: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử: $x^4 + 2012x^2 + 2011x + 2012$.

HD:

$x^4 + 2012x^2 + 2011x + 2012 = (x^4 - x) + (2012x^2+2012x+2012)$

$= x(x^3- 1) + 2012 (x^2+x+1)$ $= x(x -1) (x^2+x+1))+ 2012 (x^2+x+1)$

$= (x^2+x+1) [x(x -1) + 2012]$ $= (x^2+x+1) (x^2 –x + 2012)$

Bài 32: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử: $x^4 + 2010x^2 + 2009x + 2010$.

HD:

$x^4 + 2010x^2 + 2009x + 2010 = \left(x^4 - x\right)+\left(2010x^2 + 2010x + 2010\right)$

$= x\left(x-1\right)\left(x^2 + x + 1\right) + 2010\left(x^2 + x + 1\right) = \left(x^2 + x + 1\right)\left(x^2 - x + 2010\right)$.

Bài 33: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử: $x^4+2008x^2+2007x+2008$

HD:

$$x^4+2008x^2+2007x+2008=x^4+x^2+2007x^2+2007x+2007+1$$

$= x^4 + x^2 + 1 + 2007\left(x^2 + x + 1\right) = \left(x^2 + 1\right)^2 - x^2 + 2007\left(x^2 + x + 1\right)$

$= \left(x^2 + x + 1\right)\left(x^2 - x + 1\right) + 2007\left(x^2 + x + 1\right) = \left(x^2 + x + 1\right)\left(x^2 - x + 2008\right)$

Bài 34: Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^4 + 1997x^2 + 1996x + 1997$

HD:

Ta có:

$\left(x^4 + x^2 + 1\right) + \left(1996x^2 + 1996x + 1996\right) = \left(x^2 + x + 1\right)\left(x^2 - x + 1\right) + 1996\left(x^2 + x + 1\right)$

$= \left(x^2 + x + 1\right)\left(x^2 - x + 1997\right)$

Bài 35: Phân tích thành nhân tử: $x^4 + 2004x^2 + 2003x + 2004$

HD:

$= x^4 + 2004x^2 + 2004x - x + 2004 = \left(x^4 - x\right) + 2004\left(x^2 + x + 1\right)$

$= x\left(x^3 - 1\right) + 2004\left(x^2 + x + 1\right) = x\left(x - 1\right)\left(x^2 + x + 1\right) + 2004\left(x^2 + x + 1\right)$

$= \left(x^2 + x + 1\right)\left(x^2 - x + 2004\right)$

Bài 36: Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^4 + 2010x^2 + 2009x + 2010$

HD :

$x^4 + x^2 + 1 + 2009x^2 + 2009x + 2009 = \left(x^2 + x + 1\right)\left(x^2 - x + 1\right) + 2009\left(x^2 + x + 1\right)$

$= \left(x^2 + x + 1\right)\left(x^2 - x + 2010\right)$

Dạng $A(x) = (x + a)(x + b)(x + c)(x + d) + e$ mà a + b = c + d

Cách giải: $A(x) = (x + a)(x + b)(x + c)(x + d) + e = [x^2 + (a + b)x + ab][x^2 + (c + d)x + cd] + e$

Đặt $t = x^2 + (a + b)x + ab \Rightarrow x^2 + (c + d)x + cd = t - ab + cd \Rightarrow G(t) = t(t - ab + cd) + e = t^2 + (cd - ab)t + e$

Bài 37: Phân tích đa thức thành nhân tử: $\left(x + 1\right)\left(x + 3\right)\left(x + 5\right)\left(x + 7\right) + 15$

HD :

Với dạng này, ta chỉ việc lấy số nhỏ nhất nhân với số lớn nhất, để tạo ra những số hạng giống nhau :

$\left(x + 1\right)\left(x + 7\right)\left(x + 3\right)\left(x + 5\right) + 15 = \left(x^2 + 8x + 7\right)\left(x^2 + 8x + 15\right) + 15$

Đặt $x^2 + 8x = t \Rightarrow \left(t + 7\right)\left(t + 15\right) + 15 = t^2 + 22t + 105 + 15 = t^2 + 22t + 120$

$= \left(t + 10\right)\left(t + 12\right) = \left(x^2 + 8x + 10\right)\left(x^2 + 8x + 12\right) = \left(x^2 + 8x + 10\right)\left(x + 6\right)\left(x + 2\right)$

Bài 38: Phân tích đa thức thành nhân tử: $x(x+4)(x+6)(x+10)+128$

HD:

Cách 1:

Ta có:

$$x(x+4)(x+6)(x+10)+128=\left[x(x+10)\right]\left[(x+4)(x+6)\right]+128=\left(x^2+10x\right)\left(x^2+10x+24\right)+128$$

Đặt $x^2+10x+12=y\Rightarrow(y-12)(y+12)+128=y^2-144+128=y^2-16=(y+4)(y-4)$

$$=\left(x^2+10x+8\right)\left(x^2+10x+16\right)=(x+2)(x+8)\left(x^2+10x+8\right)$$

Cách 2:

$$x(x+10)(x+4)(x+6)+128=\left(x^2+10x\right)\left(x^2+10x+24\right)+128$$

Đặt : $x^2+10x=t$, Khi đó đa thức trở thành : $t(t+24)+128=t^2+24t+128=(t+8)(t+16)$

Thay t trở lại đa thức ta được : $\left(x^2+10x+8\right)\left(x^2+10x+16\right)=\left(x^2+10x+8\right)(x+2)(x+8)$

Bài 39: Phân tích đa thức thành nhân tử: $(a+1)(a+2)(a+3)(a+4)+1$

HD :

Ta có : $(a+1)(a+4)(a+2)(a+3)+1=\left(a^2+5a+4\right)\left(a^2+5a+6\right)+1$

Đặt $a^2+5a+5=t$, Khi đó đa thức trở thành : $(t-1)(t+1)+1=t^2=\left(a^2+5a+5\right)^2$

Bài 40: Phân tích đa thức thành nhân tử: $(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)-24$

HD :

Ta có : $(x+2)(x+5)(x+3)(x+4)-24=\left(x^2+7x+10\right)\left(x^2+7x+12\right)-24$

Đặt : $x^2+7x+11=t$, Khi đó đa thức trở thành

$$(t-1)(t+1)-24=t^2-25=(t-5)(t+5)=\left(x^2+7x+6\right)\left(x^2+7x+16\right)=(x+1)(x+6)\left(x^2+7x+16\right)$$

Bài 41: Phân tích đa thức thành nhân tử: $(4x+1)(12x-1)(3x+2)(x+1)-4$

HD :

$$(4x+1)(3x+2)(12x-1)(x+1)-4=\left(12x^2+11x+2\right)\left(12x^2+11x-1\right)-4$$

Đặt $12x^2+11x=t$, Khi đó đa thức trở thành : $(t+2)(t-1)-4=t^2+t-6=(t-2)(t+3)$

$$\left(12x^2+11x-2\right)\left(12x^2+11x+3\right)$$

Bài 42: Phân tích đa thức thành nhân tử: $(x-4)(x-5)(x-6)(x-7)-1680$

HD :

$$(x-4)(x-7)(x-5)(x-6)-1689=(x^2-11x+28)(x^2-11x+30)-1680$$

Đặt $x^2-11x+29=t$, Khi đó đa thức trở thành : $(t-1)(t+1)-1680=t^2-1681=(t-41)(t+41)$

Thay t trở lại đa thức ta được : $(x^2-11x-12)(x^2-11x+70)=(x-12)(x+1)(x^2-11x+70)$

Bài 43: Phân tích đa thức thành nhân tử: $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)-3$

HD:

$$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)-3=\underbrace{(x^2-5x+4)}_{t}.\underbrace{(x^2-5x+6)}_{t+2}-3=t^2+2t-3=(t-1)(t+3)$$

$$=(x^2-5x+3)(x^2-5x+7)$$

Bài 44: Phân tích đa thức thành nhân tử : $(2x-1)(x-1)(x-3)(2x+3)+9$

HD:

$$(2x-1)(x-1)(x-3)(2x+3)+9=(2x^2-3x+1)(2x^2-3x-9)+9=t^2-10t+9=x(2x-3)(2x^2-3x-8)$$

Bài 45: Phân tích đa thức thành nhân tử: $(4x+1)(12x-1)(3x+2)(x+1)-4$

HD:

$$(4x+1)(3x+2)(12x-1)(x+1)-4=(12x^2+11x+2)(12x^2+11x-1)-4$$

Đặt $12x^2+11x=t$,

Khi đó đa thức trở thành : $(t+2)(t-1)-4=t^2+t-6=(t-2)(t+3)$

Vậy : $(4x+1)(12x-1)(3x+2)(x+1)-4$ = $(12x^2+11x-2)(12x^2+11x+3)$

Bài 46: Phân tích P(x) = (x +1)(x + 2)(x +3)(x +4) – 15 thành nhân tử.

HD:

Với a = 1, b = 4, c = 2, d = 3 thì a + b = 5 =c + d. Biến đổi:

P(x) = (x + 1)(x + 4)(x + 2)(x + 3) – 15 = $(x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6) – 15$

Đặt $y = x^2 + 5x + 4$ thì P(x) trở thành Q(y) = y(y + 2) – 15

$= y^2 +2y – 15$

$= y^2 – 3y + 5y – 15$

= y(y – 3) + 5(y – 3)

= (y – 3)(y +5)

Do đó . P(x) = $(x^2 +5x + 1)(x^2 + 5x + 9)$

Dạng: $(x+a)^4+(x+b)^4$

Đặt $t=x+\frac{a+b}{2}\Rightarrow x=t-\frac{a+b}{2}\Rightarrow G(t)=(t-\frac{a+b}{2}+a)^4+(t-\frac{a+b}{2}+b)^4=(t-\frac{b-a}{2})^4+(t+\frac{b-a}{2})^4$

$=....=ct^4+dt^2+e$ (Dạng 1)

Bài 47: Phân tích P(x) = $(x – 3)^4$ + $(x – 1)^4$ – 16 thành nhân tử.

HD:

Đa thức dạng P(x) = $(x + a)^4$ + $(x + b)^4$ +c

Đặt biến phụ y = x + (a + b)/2 và biến đổi P(x) về dạng $mx^4 + nx^2 + p$

Giải: Đặt y = x – 2 lúc đó P(x) trở thành Q(y) = $(y – 1)^4$ + $(y + 1)^4$ – 16

= $2y^4 + 12y^2 – 14$

= $2(y^2 + 7)(y^2 – 1)$

= $2(y^2 + 7)(y – 1)(y + 1)$

Do đó P(x) = $2(x^2 – 4x + 11)(x – 3)(x – 1)$.

Bài 48: Phân tích đa thức thành nhân tử:

a) $(x+3)^4+(x+5)^4-2$ b. $(x+3)^4+(x+1)^4-16$ c. $(x+3)^4+(x+5)^4-16$

HD:

a. Đặt $t=x+4\Rightarrow x=t-4\Rightarrow(t-1)^4+(t+1)^4-2$

$=\left[(t-1)^2+(t+1)^2\right]^2-2=2t^4+12t^2=2t^2(t^2+6)=2(x+4)^2\left[(x+4)^2+6\right]$

b. Đặt $t=x+2\Rightarrow(t+1)^4+(t-1)^4-16=2(t^4+6t^2-7)=2(y^2+6y-7)(y=t^2)=...$

c. $(x+3)^4+(x+5)^4-16=2(x+3)(x+5)\left[(x+4)^2+7\right]$

Các dạng khác:

Bài 49: Phân tích đa thức thành nhân tử: $\left(x^2+x+1\right)\left(x^2+x+2\right)-12$

HD :

Đặt $x^2+x=t$ khi đó đa thức trở thành : $\left(t+1\right)\left(t+2\right)-12=t^2+3t-10=\left(t-2\right)\left(t+5\right)$

Thay t trở lại đa thức ta được : $\left(x^2+x-2\right)\left(x^2+x+5\right)=\left(x-1\right)\left(x+2\right)\left(x^2+x+5\right)$

Bài 50: Phân tích đa thức thành nhân tử: $\left(x^2-4\right)\left(x^2-10\right)-72$

HD :

Đặt $x^2-4=t$ khi đó đa thức trở thành :

$$t\left(t-6\right)-72=t^2-6t-72=\left(t-12\right)\left(t+6\right)=\left(x^2-16\right)\left(x^2+2\right)=\left(x-4\right)\left(x+4\right)\left(x^2+2\right)$$

Bài 51: Phân tích P(x) = (3x +2)(3x – 5)(x – 9)(9x + 10) + $24x^2$ thành nhân tử.

HD:

Đa thức dạng: P(x) = $(a_1x + a_2)(b_1x + b_2)(c_1x + c_2)(d_1x + d_2)$

với $a_1b_1 = c_1d_1$ và $a_2b_2 = c_2d_2$

Dễ thấy $a_1b_1 = 3.3 = 9.1 = c_1d_1$ và $a_2b_2 = 2.(-5) = (-1).10 = c_2d_2$

P(x) = $(9x^2 – 9x – 10)(9x^2 + 9x – 10) + 24x^2$

Đặt y = (3x +2)(3x – 5) = $9x^2 – 9x – 10$ thì P(x) trở thành:

Q(y) = y(y + 10x) = $24x^2$

Tìm m.n = $24x^2$ và m + n = 10x ta chọn được m = 6x , n = 4x

Ta được: Q(y) = $y^2 + 10xy + 24x^2$

= (y + 6x)(y + 4x)

Do đó P(x) = ($9x^2 – 3x – 10)(9x^2 – 5x – 10)$.

Bài 52: Phân tích đa thức thành nhân tử: $4\left(x+5\right)\left(x+6\right)\left(x+10\right)\left(x+12\right)-3x^2$

HD :

Ta có : $4\left(x+5\right)\left(x+12\right)\left(x+6\right)\left(x+10\right)-3x^2=4\left(x^2+17x+60\right)\left(x^2+16x+60\right)-3x^2$

$x^2\left[4\left(x+17+\frac{60}{x}\right)\left(x+16+\frac{60}{x}\right)-3\right]$, Đặt : $x+\frac{60}{x}=t$, Khi đó đa thức trở thành :

$x^2\left[4(t+17)(t+16)-3\right]=x^2\left(4t^2+132t+1085\right)=x^2(2t+31)(2t+35)$

$=x^2\left(2x+\frac{120}{x}+31\right)\left(2x+\frac{120}{x}+35\right)=\left(2x^2+31x+120\right)\left(2x^2+35x+120\right)$

Bài 53: Phân tích đa thức thành nhân tử: $\left(x^2+3x+1\right)\left(x^2+3x-3\right)-5$

HD :

Đặt : $x^2+3x=t$, Khi đó đa thức trở thành :

$(t+1)(t-3)-5=t^2-2t-8=(t+2)(t-4)=\left(x^2+3x+2\right)\left(x^2+3x-4\right)$

$(x+1)(x+2)(x-1)(x+4)$

Bài 54: Phân tích đa thức thành nhân tử: $\left(x^2+4x+8\right)^2+3x^3+14x^2+24x$

HD :

$\left(x^2+4x+8\right)^2+3x\left(x^2+4x+8\right)+2x^2$,

Đặt: $\left(x^2+4x+8\right)=y \Rightarrow y^2+3xy+2x^2 \Rightarrow (y+x)(y+2x)$

Bài 55: Phân tích đa thức thành nhân tử: $\left(x^2+3x-4\right)\left(x^2+x-6\right)-24$

HD :

Ta có : $\left(x^2+3x-4\right)\left(x^2+x-6\right)-24=(x-1)(x+4)(x-2)(x+3)-24$

$(x-2)(x+4)(x-1)(x+3)-24=\left(x^2+2x-8\right)\left(x^2+2x-3\right)-24$

Đặt : $x^2+2x=t$, khi đó đa thức trở thành : $(t-8)(t-3)-24=t^2-11t=t(t-11)$

Thay t trở lại ta được : $\left(x^2+2x\right)\left(x^2+2x-11\right)=x(x+2)\left(x^2+2x-11\right)$

Bài 56: Phân tích đa thức thành nhân tử: $\left(x^2+2x+7\right)-\left(x^2+2x+4\right)\left(x^2+2x+3\right)$

HD :

Đặt : $x^2+2x=t$, khi đó đa thức trở thành :

$(t+7)-(t+4)(t+3)=t+7-t^2-7t-12=-t^2-6t-5=-(t+1)(t+5)$,

Thay t trở lại ta được :

$-\left(x^2+2x+1\right)\left(x^2+2x+5\right)=-(x+1)^2\left(x^2+2x+5\right)$

Bài 57: Phân tích đa thức thành nhân tử: $(x+y)(x+2y)(x+3y)(x+4y)+y^4$

HD: $(x+y)(x+2y)(x+3y)(x+4y)+y^4=(x^2+5xy+5y^2)^2$

Bài 58: Phân tích đa thức thành nhân tử: $4(x^2+15x+50)(x^2+18x+72)-3x^2$

HD:

$4(x^2+15x+50)(x^2+18x+72)-3x^2=4(x+5)(x+10)(x+6)(x+12)-3x^2$

$=4(x^2+17x+60)(x^2+16x+60)-3x^2$

Đặt $t=x^2+16x+60\Rightarrow x^2+17x+60=t+x\Rightarrow 4[(t+x).t]\text{-}3x^2=4t^2+4tx-3x^2=(2t+x)^2-(2x)^2$

$=(2t-x)(2t+3x)=(2x^2+31x+120)(2x^2+25x+120)=(x+8)(2x+15)(2x^2+35x+120)$

Bài 59: Phân tích đa thức thành nhân tử: $\left(x^2+2x+7\right)-\left(x^2+2x+4\right)\left(x^2+2x+3\right)$

HD:

Đặt : $x^2+2x=t$, khi đó đa thức trở thành :

$(t+7)-(t+4)(t+3)=t+7-t^2-7t-12=-t^2-6t-5=-(t+1)(t+5)$, Thay t trở lại ta được :

$-\left(x^2+2x+1\right)\left(x^2+2x+5\right)=-\left(x+1\right)^2\left(x^2+2x+5\right)$

Thay t trở lại đa thức ta được : $\left(x^2-11x-12\right)\left(x^2-11x+70\right)=\left(x-12\right)\left(x+1\right)\left(x^2-11x+70\right)$

Bài 60: Phân tích đa thức thành nhân tử. $(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2) – 12$

HD:

Đặt $x^2 + x + 1 = y$ ta có $x^2 + x + 2 = y + 1$

Ta có: $(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2) – 12 = y(y + 1) – 12$

$= y^2 + y – 12$

$= (y – 3)(y + 4)$

Do đó: $(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2) – 12 = (x^2 + x – 2)(x^2 + x + 5)$

$= (x – 1)(x + 2)(x^2 + x + 5)$

Bài 61: Cho biểu thức: $A=\left(b^2+c^2-a^2\right)^2-4b^2c^2$

a, Phân tích A thành nhân tử

b, Chứng minh rằng: Nếu a, b, c là độ dài các cạnh của 1 tam giác thì A< 0

HD:

a) Ta có: $A=\left(b^2+c^2-a^2\right)^2-4b^2c^2=\left(b^2+c^2-a^2\right)^2-\left(2bc\right)^2$

$=\left(b^2+c^2-a^2-2bc\right)\left(b^2+c^2-a^2+2bc\right)=\left(b+c-a\right)\left(b+c+a\right)\left(b-c-a\right)\left(b-c+a\right)$

b) Vì a, b, c là độ dài ba cạnh của 1 tam giác nên:

$b+c-a>0, b+c+a>0, b-c-a<0, b-c+a>0 \Rightarrow A<0$

Bài 62: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $\left(x^2+x\right)^2-2\left(x^2+x\right)-15$;

b) $\left(x^2+2x\right)^2+9x^2+18x+20$;

c) $\left(x^2+3x+1\right)\left(x^2+3x+2\right)-6$;

d) $\left(x^2+8x+7\right)\left(x+3\right)\left(x+5\right)+15$

HD:

a) $\left(x^2+x\right)^2-2\left(x^2+x\right)-15$

Đặt $x^2+x=y$, ta có: $y^2-2y-15=\left(y-5\right)\left(y+3\right)$

Vậy, $\left(x^2+x\right)^2-2\left(x^2+x\right)-15=\left(x^2+x-5\right)\left(x^2+x+3\right)$

b) $\left(x^2+2x\right)^2+9x^2+18x+20$

Đặt $x^2+2x=y$, ta có: $y^2+9y+20=\left(y+4\right)\left(y+5\right)$

Vậy, $\left(x^2+2x\right)^2+9x^2+18x+20=\left(x^2+2x+4\right)\left(x^2+2x+5\right)$

c) $\left(x^2+3x+1\right)\left(x^2+3x+2\right)-6$

Đặt $x^2+3x+1=y$, ta có: $y^2+y-6=\left(y-2\right)\left(y+3\right)$

Vậy, $\left(x^2+3x+1\right)\left(x^2+3x+2\right)-6=\left(x^2+3x-1\right)\left(x^2+3x+4\right)$

d) $\left(x^2+8x+7\right)\left(x+3\right)\left(x+5\right)+15$

Đặt $x^2+8x+7=y$, ta có: $y^2+8y+15=\left(y+3\right)\left(y+5\right)$

Vậy, $\left(x^2+8x+7\right)\left(x+3\right)\left(x+5\right)+15=\left(x^2+8x+10\right)\left(x^2+8x+12\right)$

Bài 63: Phân tích các đa thức thành nhân tử: $\left(x^2+4x+8\right)^2+3x\left(x^2+4x+8\right)+2x^2$

HD:

$\left(x^2+4x+8\right)^2+3x\left(x^2+4x+8\right)+2x^2$;

Đặt $x^2+4x+8=y$ ta được:

$\left(x^2+4x+8\right)^2+3x\left(x^2+4x+8\right)+2x^2=y^2+3xy+2x^2$

$=\left(y^2+2xy+x^2\right)+\left(xy+x^2\right)=(y+x)(y+2x)$

$=\left(x^2+5x+8\right)(x+2)(x+4)$

Vậy, $\left(x^2+4x+8\right)^2+3x\left(x^2+4x+8\right)+2x^2=\left(x^2+5x+8\right)(x+2)(x+4)$

Dạng 2: Thêm bớt hạng tử

I. Phương pháp :

- Các đa thức không thể sử dụng các phương pháp như đặt nhân tử chung, nhóm hạng tử và sủ dụng hằng đẳng thức cũng như đoán nghiệm,

- Trong các thành phần của đa thức có chứa các hạng tử bậc 4, ta sẽ thêm bớt để đưa về hằng đẳng thức số 3 : $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

II. Luyện tập:

Bài 1: Phân tích đa thức thành nhân tử:

a, $4x^4+81$ b, $64x^4+y^4$

HD :

a, Ta có : $4x^4+81=\left(2x^2\right)^2+9^2+2.2x^2.9-2.2x^2.9=\left(2x^2+9\right)^2-36x^2$

$=\left(2x^2+9\right)^2-(6x)^2=\left(2x^2+6x+9\right)\left(2x^2-6x+9\right)$

b, Ta có : $64x^4+y^4=\left(8x^2\right)^2+\left(y^2\right)^2+2.8x^2.y^2-2.8x^2.y^2=\left(8x^2+y^2\right)^2-16x^2y^2$

$=\left(8x^2+y^2\right)^2-(4xy)^2=\left(8x^2+4xy+y^2\right)\left(8x^2-4xy+y^2\right)$

Bài 2: Phân tích đa thức thành nhân tử:

a, $4x^4+y^4$ b, $4x^8+1$ c, x^4y^4+4

HD :

a, Ta có : $4x^4+y^4=\left(2x^2\right)^2+\left(y^2\right)^2=\left(2x^2\right)^2+\left(y^2\right)^2+2.2x^2.y^2-4x^2y^2$

$=\left(2x^2+y^2\right)^2-\left(2xy\right)^2=\left(2x^2+y^2+2xy\right)\left(2x^2+y^2-2xy\right)$

b, Ta có : $4x^8+1=\left(2x^4\right)^2+1+2.2x^4.1-4x^4$

$=\left(2x^4+1\right)^2-\left(2x^2\right)^2=\left(2x^4+2x^2+1\right)\left(2x^4-2x^2+1\right)$

c, Ta có : $x^4y^4+4=\left(x^2y^2\right)^2+2^2=\left(x^2y^2\right)^2+2^2+2.x^2.y^2.2-4x^2y^2$

$\left(x^2y^2+2\right)^2-\left(2xy\right)^2=\left(x^2y^2-2xy+2\right)\left(x^2y^2+2xy+2\right)$

Bài 3: Phân tích đa thức thành nhân tử:

a, x^8+x^4+1 b, x^7+x^5+1

HD :

a, Ta có: $x^8+x^4+1=x^8+x^4+x^4+1-x^4=x^8+2x^4+1-x^4$

$\left(x^4+1\right)^2-\left(x^2\right)^2=\left(x^4+x^2+1\right)\left(x^4-x^2+1\right)$

b, Ta có: $x^7+x^5+1=x^7+x^5+(x^2+x)+1-x^2-x=\left(x^7-x\right)+\left(x^5-x^2\right)+\left(x^2+x+1\right)$

$=x\left(x^6-1\right)+x^2\left(x^3-1\right)+\left(x^2+x+1\right)=x\left(x^3+1\right)\left(x^3-1\right)+x^2\left(x^3-1\right)+\left(x^2+x+1\right)$

$=x\left(x^3+1\right)\left(x-1\right)\left(x^2+x+1\right)+x^2\left(x^3-1\right)+\left(x^2+x+1\right)$

$=\left(x^2+x+1\right)\left(x^5-x^4+x^2-x\right)+\left(x^3-x^2\right)\left(x^2+x+1\right)+\left(x^2+x+1\right)$

$=\left(x^2+x+1\right)\left(x^5-x^4+x^2-x+x^3-x^2+1\right)=\left(x^2+x+1\right)\left(x^5-x^4+x^3-2x^2-x+1\right)$

Bài 4: Phân tích đa thức thành nhân tử:

a, x^7+x^2+1 b, x^5+x-1 c, x^8+x+1

HD:

a, Ta có: $x^7+x^2+1=\left(x^7-x\right)+\left(x^2+x+1\right)=x\left(x^6-1\right)+\left(x^2+x+1\right)$

$=x\left(x^3-1\right)\left(x^3+1\right)+\left(x^2+x+1\right)=x\left(x-1\right)\left(x^2+x+1\right)\left(x^3+1\right)+\left(x^2+x+1\right)$

$\left(x^2+x+1\right)\left(x^5-x^4+x^2-x+1\right)$

b, Ta có: $x^5+x-1=\left(x^5+x^2\right)+\left(-x^2+x-1\right)=x^2\left(x^3+1\right)-\left(x^2-x+1\right)$

$=x^2\left(x+1\right)\left(x^2-x+1\right)-\left(x^2-x+1\right)=\left(x^2-x+1\right)\left(x^3+x^2-1\right)$

c, Ta có: $x^8+x+1=\left(x^8-x^2\right)+\left(x^2+x+1\right)=x^2\left(x^6-1\right)+\left(x^2+x+1\right)$

$=x^2\left(x^3+1\right)\left(x-1\right)\left(x^2+x+1\right)+\left(x^2+x+1\right)=\left(x^2+x+1\right)\left(x^6-x^5+x^3-x^2+1\right)$

Bài 5: Phân tích đa thức thành nhân tử:

a, $64x^4+y^4$ b, $4x^4+y^4$ c, x^4+324

HD:

a, Ta có: $64x^4+y^4=\left(8x^2\right)^2+\left(y^2\right)^2+2.8x^2y^2-16x^2.y^2=\left(8x^2+y^2\right)^2-\left(4xy\right)^2$

$=\left(8x^2+y^2-4xy\right)\left(8x^2+y^2+4xy\right)$

b, Ta có: $4x^4+y^4=\left(2x^2\right)^2+\left(y^2\right)^2=\left(2x^2\right)^2+\left(y^2\right)^2+2.2x^2.y^2-4x^2y^2$

$\left(2x^2+y^2\right)^2-\left(2xy\right)^2=\left(2x^2+y^2-2xy\right)\left(2x^2+y^2+2xy\right)$

c, Ta có: $x^4+324=\left(x^2\right)^2+\left(18\right)^2=\left(x^2\right)^2+\left(18\right)^2+2.x^2.18-36x^2$

$=\left(x^2+18\right)^2-\left(6x\right)^2=\left(x^2+18+6x\right)\left(x^2+18-6x\right)$

Bài 6: Phân tích đa thức thành nhân tử:

a, x^4+64 b, $81x^4+4y^4$ c, x^4+4y^4

HD:

a, Ta có: $x^4+64=\left(x^2\right)^2+8^2=\left(x^2\right)^2+8^2+2.x^2.8-16x^2$

$=\left(x^2+8\right)^2-\left(4x\right)^2=\left(x^2+8-4x\right)\left(x^2+8+4x\right)$

b, Ta có: $81x^4+4y^4=\left(9x^2\right)^2+\left(2y^2\right)^2=\left(9x^2\right)^2+\left(2y^2\right)^2+2.9x^2.2y^2-36x^2y^2$

$\left(9x^2+2y^2\right)-\left(6xy\right)^2=\left(9x^2+2y^2-6xy\right)\left(9x^2+2y^2+6xy\right)$

c, Ta có: $x^4+4y^4=\left(x^2\right)^2+\left(2y^2\right)^2=\left(x^2\right)^2+\left(2y^2\right)^2+2.x^2.2y^2-4x^2y^2$

$=\left(x^2+2y^2\right)^2-\left(2xy\right)^2=\left(x^2+2y^2+2xy\right)\left(x^2+2y^2-2xy\right)$

Bài 7: Phân tích đa thức thành nhân tử:

a, x^4y^4+4 b, $4x^4y^4+1$ c, $4x^4+81$

HD:

a, Ta có: $x^4y^4+4=\left(x^2y^2\right)^2+2^2=\left(x^2y^2\right)^2+2^2+2.x^2y^2.2-4x^2.y^2$

$\left(x^2y^2+2\right)^2-\left(2xy\right)^2=\left(x^2y^2-2xy+2\right)\left(x^2y^2+2xy+2\right)$

b, Ta có: $4x^4y^4+1=\left(2x^2y^2\right)^2+1=\left(2x^2y^2\right)^2+1+2.2x^2y^2-4x^2y^2$

$\left(2x^2y^2+1\right)^2-\left(2xy\right)^2=\left(2x^2y^2+1+2xy\right)\left(2x^2y^2+1-2xy\right)$

c, Ta có: $4x^4+81=\left(2x^2\right)^2+9^2=\left(2x^2\right)^2+9^2+2.2x^2.9-36x^2$

$\left(2x^2+9\right)^2-\left(6x\right)^2=\left(2x^2+9+6x\right)\left(2x^2+9-6x\right)$

Bài 8: Phân tích đa thức thành nhân tử:

a, $64x^4+y^4$ b, a^4+64 c, a^4+4b^2

HD:

a, Ta có: $64x^4+y^4=\left(8x^2\right)^2+\left(y^2\right)^2=\left(8x^2\right)^2+\left(y^2\right)^2+2.8x^2.y^2-16x^2y^2$

$=\left(8x^2+y^2\right)^2-\left(4xy\right)^2=\left(8x^2+y^2+4xy\right)\left(8x^2+y^2-4xy\right)$

b, Ta có: $a^4+64=\left(a^2\right)^2+8^2=\left(a^2\right)^2+8^2+2.a^2.8-16a^2$

$=\left(a^2+8\right)^2-\left(4a\right)^2=\left(a^2+8+4a\right)\left(a^2+8-4a\right)$

c, Ta có: $a^4+4b^4=\left(a^2\right)^2+\left(2b^2\right)^2+2.a^2.2b^2-4a^2.b^2$

$=\left(a^2-2b^2\right)^2-\left(2ab\right)^2=\left(a^2-2b^2+2ab\right)\left(a^2-2b^2-2ab\right)$

Bài 9: Phân tích đa thức thành nhân tử:

a, x^4+4 b, $4x^8+1$ d, x^4+4

HD:

a, Ta có: $x^4+4=\left(x^2\right)^2+2^2+2.x^2.2-4x^2=\left(x^2+2\right)^2-\left(2x\right)^2$

$=\left(x^2+2-2x\right)\left(x^2+2+2x\right)$

b, Ta có: $4x^8+1=\left(2x^4\right)^2+1^2+2.2x^4.1-4x^4=\left(2x^4+1\right)^2-\left(2x^2\right)^2$

$=\left(2x^4+1-2x^2\right)\left(2x^4+1+2x^2\right)$

c, Ta có: $x^4+4=\left(x^2\right)^2+2^2+2.x^2.2-4x^2=\left(x^2+2\right)^2-\left(2x\right)^2$

$=\left(x^2+2-2x\right)\left(x^2+2+2x\right)$

Bài 10: Phân tích đa thức thành nhân tử:

b. $4x^4+81y^4$ c. x^8+98x^4+1 e. x^6-64y^6 f. a^4+3a^2+4

HD :

b. $=(2x+9y)^2-(6xy)^2=(2x^2+9y^2-6xy)(2x^2+9y^2+6xy)$

c. $x^8+98x^4+1=(x^8+2x^4+1)+96x^4=(x^4+1)^2+16x^2(x^4+1)+64x^4-16x^2(x^4+1)+32x^4$
$=(x^4+1+8x^2)^2-16x^2(x^4+1-2x^2)=(x^4+8x^2+1)^2-(4x^3-4x)^2=...$

e. $x^6-64y^6=(x^3)^2-(8y^3)^2$

f. $a^4+3a^2+4=(a^2+2)^2-a^2=(a^2-a+2)(a^2+a+2)$

Bài 11: Phân tích đa thức thành nhân tử:

a, $x^{64}+x^{32}+1$ b, $a^{10}+a^5+1$ d, x^5-x^4-1

HD:

a, Ta có: $x^{64}+x^{32}+1=x^{64}+2.x^{32}+1-x^{32}=\left(x^{32}+1\right)^2-x^{32}$

$=\left(x^{32}+1+x^{16}\right)\left(x^{32}+1-x^{16}\right)$

b, Ta có: $a^{10}+a^5+1=\left(a^{10}-a\right)+\left(a^5-a^2\right)+\left(a^2+a+1\right)=a\left(a^9-1\right)+a^2\left(a^3-1\right)+\left(a^2+a+1\right)$

$= a\left((a^3)^3-1\right)+a^2\left(a^3-1\right)+\left(a^2+a+1\right)=a\left(a^3-1\right)\left(a^6+2a^3+1\right)+a^2\left(a^3-1\right)+\left(a^2+a+1\right)$

$=\left(a^7+2a^4+a\right)(a-1)\left(a^2+a+1\right)+a^2(a-1)\left(a^2+a+1\right)+\left(a^2+a+1\right)$

$=\left(a^2+a+1\right)\left[\left(a^7+2a^4+a\right)(a-1)+\left(a^3-a^2\right)+1\right]$

c, Ta có: $x^5-x^4-1=\left(x^5-x^4+x^3\right)-\left(x^3+1\right)=x^3\left(x^2-x+1\right)-(x+1)\left(x^2-x+1\right)$

$\left(x^2-x+1\right)\left(x^3-x-1\right)$

Bài 12: Phân tích đa thức thành nhân tử:

a. x^5+x^4+1 b. x^8+x^7+1 c. x^4+x^2+1 d. x^7+x^5+1

HD:

a. $x^5+x^4+1=x^5+x^4+x^3+1-x^3=x^3(x^2+x+1)-(x-1)(x^2+x+1)=(x^2+x+1)(x^3-x+1)$

b. $x^8+x^7+1=x^8+x^7+x^6-x^6+1=(x^2+x+1)[x^6-(x-1(x^3+1)]=(x^2+x+1)(x^6-x^4+x^3-x+1)$

c. Cách 1: $x^4+x^2+1=\left(x^4+2x^2+1\right)-x^2=\left(x^2+1\right)^2-x^2=\left(x^2-x+1\right)\left(x^2+x+1\right)$

Cách 2:

$x^4+x^2+1=x^4-x^3+x^2+x^3+1=x^2\left(x^2-x+1\right)+(x+1)\left(x^2-x+1\right)=\left(x^2-x+1\right)\left(x^2+x+1\right)$

Cách 3:

$x^4+x^2+1=x^4+x^3+x^2-\left(x^3-1\right)=x^2\left(x^2+x+1\right)+(x-1)\left(x^2+x+1\right)=\left(x^2+x+1\right)\left(x^2+x-1\right)$

d) Ta có: $x^7+x^5+1=\left(x^7-x\right)+\left(x^5-x^2\right)+\left(x^2+x+1\right)=x\left(x^3-1\right)\left(x^3+1\right)+x^2\left(x^3-1\right)+\left(x^2+x+1\right)$

$=\left(x^2+x+1\right)\left[\left(x^5-x^4+x^2-x\right)+\left(x^3-x^2\right)+1\right]=\left(x^2+x+1\right)\left(x^5-x^4+x^2-x+1\right)$

Dạng 3:Đa thức bậc cao

I. Phương pháp:

- Đối với đa thức bậc cao có dạng $x^{3m+1}+x^{3m+2}+1$ luôn luôn có nhân tử chung là bình phương thiếu của tổng hoặc hiệu, nên ta thêm bớt để làm cuất hiện bình phương thiếu cảu tổng hoặc hiệu:

II. Luyện tập:

Bài 1: Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^7+x^5+x^4+x^3+x^2+1$

HD:

Ta có: $\left(x^7+x^5+x^3\right)+\left(x^4+x^2+1\right)=x^3\left(x^4+x^2+1\right)+\left(x^4+x^2+1\right)$

$=\left(x^4+x^2+1\right)\left(x^3+1\right)=\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+1\right)(x+1)\left(x^2-x+1\right)$

$=\left(x^2-x+1\right)^2(x+1)\left(x^2+x+1\right)$

Bài 2: Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^{11}+x^{10}+x^9+...+x^2+x+1$

HD:

Ta có: $x^{11}+x^{10}+x^9+...+x^2+x+1=\left(x^{11}+x^{10}+x^9\right)+\left(x^8+x^7+x^6\right)+...+\left(x^2+x+1\right)$

$=x^9\left(x^2+x+1\right)+x^6\left(x^2+x+1\right)+...+\left(x^2+x+1\right)$

$\left(x^2+x+1\right)\left(x^9+x^6+x^3+1\right)=(x+1)\left(x^2+1\right)\left(x^4-x^2+1\right)\left(x^2-x+1\right)\left(x^2+x+1\right)$

Bài 3: Phân tích đa thức thành nhân tử: x^8+14x^4+1

HD:

Ta có: $x^8+2x^4+1+12x^4=\left(x^4+1\right)^2+12x^4=\left(x^4+1\right)^2+2.\left(x^4+1\right).2x^2+4x^4-4x^2\left(x^4+1\right)+8x^4$

$=\left(x^4+1+2x^2\right)^2-\left(2x^3-2x\right)^2$

$=\left(x^4+1+2x^2-2x^3+2x\right)\left(x^4+1+2x^2+2x^3-2x\right)$

Bài 4: Phân tích đa thức thành nhân tử: x^8+98x^4+1

HD:

Ta có: $\left(x^4+1\right)^2+2\left(x^4+1\right)^2.8x^2+64x^4-16x^2\left(x^4+1\right)+32x^4$

$=\left(x^4+8x^2+1\right)^2-16x^2\left(x^4+1-2x^2\right)=\left(x^4+8x^2+1\right)^2-\left(4x^3-4x\right)^2$

Bài 5: Phân tích đa thức thành nhân tử: $2x^5-3x^4+6x^3-8x^2+3$

HD:

Ta có: $2x^5-3x^4+6x^3-8x^2+3=2x^5-2x^4-x^4+x^3+5x^3-5x^2-3x^2+3$

$=2x^4(x-1)-x^3(x-1)+5x^2(x-1)-3\left(x^2-1\right)$

$=(x-1)^2(x^2+3)(2x+1)$

Bài 6: Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^5-5x^4+4x^3+4x^2-5x+1$

Bài 7: Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^6-x^4-9x^3+9x^2$

HD:

Ta có: $x^6-x^4-9x^3+9x^2 = x^2(x^4-x^2-9x+9)$

$= x^2\left[x^2(x^2-1)-9(x-1)\right]=x^2\left[x^2(x-1)(x+1)-9(x-1)\right]= x^2(x-1)(x^3+x^2-9)$

Bài 8: Phân tích đa thức thành nhân tử: $B(x)=3x^6-10x^5+34x^4-47x^3+52x^2+8x-40$

HD:

Nhận thấy đa thức có 2 nhân tử là: x – 1 và 3x + 2

$$B(x)=(x-1)(3x+2)(x^4-3x^3+11x^2-14x+20)=(x-1)(3x+2)(x^2-2x+4)(x^2-x+5)$$

Dạng 4: Đa thức đa ẩn

Bài 1: Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^2+y^2-z^2+2xy-2z-1$

HD:

Ta có: $x^2+y^2-z^2+2xy-2z-1=(x^2+2xy+y^2)-(z^2+2z+1)=(x+y)^2-(z+1)^2$

$=(x+y+z+1)(x+y-z-1)$

Bài 2: Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^2-y^2+z^2-2xz+2y-1$

HD:

Ta có: $x^2-y^2+z^2-2xz+2y-1=(x^2-2xz+z^2)-(y^2-2y+1)=(x-z)^2-(y-1)^2$

$(x-z+y-1)(x-z-y+1)$

Bài 3: Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $x^2+6xy+5y^2-5y-x$.

HD:

$$x^2+6xy+5y^2-5y-x=(x^2+xy-x)+(5xy+5y^2-5y)$$
$$=x(x+y-1)+5y(x+y-1)$$
$$=(x+y-1)(x+5y)$$

Bài 4: Phân tích các đa thức thành nhân tử: $x^2+2xy+y^2-x-y-12$

HD:

Ta có: $x^2+2xy+y^2-x-y-12=(x+y)^2-(x-y)-12=...=(x+y+3)(x+y-4)$

Vậy, $x^2+2xy+y^2-x-y-12=(x+y+3)(x+y-4)$.

Bài 5: Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^6-2x^4-x^3y^3+2xy^3$

HD:

Ta có: $x^6-2x^4-x^3y^3+2xy^3=x(x^5-2x^3-x^2y^3+2y^3)$

$=x\left[x^3(x^2-2)-y^3(x^2-2)\right]=x(x^3-y^3)(x^2-2)=x(x-y)(x^2-2)(x^2+xy+y^2)$

Bài 6: Phân tích đa thức thành nhân tử: $(a+b+c)^2+(a-b+c)^2-4b^2$

HD:

Ta có: $(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca)+(a^2+b^2+c^2-2ab-2bc+2ac)-4b^2$

$=(2a^2+2c^2-2b^2+4ac)=2(a^2+2ac+c^2-b^2)=2\left[(a+c)^2-b^2\right]$

$=2(a+c+b)(a+c-b)$

Bài 7: Phân tích đa thức thành nhân tử: $a(b^2-c^2)-b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)$

HD:

Ta có: $ab^2-ac^2-bc^2+a^2b+a^2c-b^2c=a^2(b+c)+b^2(a-c)-c^2(a+b)$

$=a^2(b+c)+b^2\left[(a+b)-(b+c)\right]-c^2(a+b)$

$=a^2(b+c)+b^2(a+b)-b^2(b+c)-c^2(a+b)$

$=(b+c)(a^2-b^2)+(a+b)(b^2-c^2)=(b+c)(a-b)(a+b)+(a+b)(b-c)(b+c)$

$=(a+b)(b+c)(a-b+b-c)=(a+b)(b+c)(a-c)$

Bài 8: Phân tích đa thức thành nhân tử: $xy(x+y)+yz(y+z)+zx(x+z)+3xyz$

HD:

Ta có:= $\left[xy(x+y)+xyz\right]+\left[yz(y+z)+xyz\right]+\left[zx(z+x)+xyz\right]$

$=xy(x+y+z)+yz(x+y+z)+zx(x+y+z)=(x+y+z)(xy+yz+zx)$

Bài 9: Phân tích đa thức thành nhân tử: $xy(x+y)-yz(y+z)-zx(z-x)$

HD:

Ta có: = $xy(x+y)-yz(y+z)-zx\left[(y+z)-(x+y)\right]$

$=xy(x+y)-yz(y+z)-zx(y+z)+zx(x+y)$

$= x(x+y)(y+z)-z(y+z)(x+y)=(x+y)(y+z)(x-z)$

Bài 10: Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^4(y-z)+y^4(z-x)+z^4(x-y)$

HD:

Ta có: $x^4(y-z)+y^4[-(y-z)-(x-y)]+z^4(x-y)$

$= x^4(y-z)-y^4(y-z)-y^4(x-y)+z^4(x-y)$

$= (y-z)(x^4-y^4)-(x-y)(y^4-z^4)$

$= (y-z)(x-y)(x+y)(x^2+y^2)-(x-y)(y-z)(y+z)(y^2+z^2)$

$= (x-y)(y-z)[(x+y)(x^2+y^2)-(y+z)(y^2+z^2)]$

$= (x-y)(y-z)(x^3+xy^2+x^2y+y^3-y^3-yz^2-y^2z-z^3)$

$= (x-y)(y-z)(x^3-z^3+y^2(x-z)+y(x^2-z^2))$

$= (x-y)(y-z)[(x-z)(x^2+xz+z^2)+y^2(x-z)+y(x-z)(x+z)]$

$= (x-y)(y-z)(x-z)(x^2+xz+z^2+y^2+xy+yz)$

Bài 10: Phân tích đa thức thành nhân tử: $(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc$

HD:

Ta có: $a^2b+abc+a^2c+ab^2+b^2c+abc+abc+bc^2+ac^2-abc$

$= (a^2b+ab^2+abc)+(b^2c+bc^2+abc)+a^2c+ca^2$

$= ab(a+b+c)+bc(a+b+c)+ac(a+c)$

$= b(a+b+c)(a+c)+ac(a+c)$

$= (a+c)(ab+b^2+bc+ac)=(a+c)(b+c)(a+b)$

Bài 11: Phân tích đa thức thành nhân tử: $(a+b+c)^3-(a+b-c)^3-(b+c-a)^3-(c+a-b)^3$

HD:

Ta có: $(a+b+c)^3-[(a+b-c)^3+(b+c-a)^3+(c+a-b)^3]$

$$\begin{cases} x=a+b-c \\ y=b+c-a \Rightarrow x+y+z=a+b+c \\ z=c+a-b \end{cases}$$

$= (x+y+z)^3-(x^3+y^3+z^3)=x^3+y^3+z^3+3(x+y)(y+z)(z+x)-x^3-y^3-z^3$

$= 3(x+y)(y+z)(z+x)=3.2a.2b.2c=24abc$

Bài 12: Phân tích đa thức thành nhân tử: $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$

HD:

Ta có: $a^2(b-c)+b^2\left[-(b-c)-(a-b)\right]+c^2(a-b)$

$= a^2(b-c)-b^2(b-c)-b^2(a-b)+c^2(a-b)$

$= (b-c)(a-b)(a+b)-(a-b)(b-c)(b+c)$

$= (b-c)(a-b)(a+b-b-c)=(a-b)(b-c)(a-c)$

Bài 13: Phân tích đa thức thành nhân tử: $x\left(y^3-z^3\right)+y\left(z^3-x^3\right)+z\left(x^3-y^3\right)$

HD:

Ta có: $xy^3-xz^3+yz^3-x^3y+x^3z-y^3z$

$= x^3(z-y)+y^3(x-z)+z^3(y-x)$

$= x^3(z-y)+y^3\left[-(z-y)-(y-x)\right]+z^3(y-x)$

$= x^3(z-y)-y^3(z-y)-y^3(y-x)+z^3(y-x)$

$= (z-y)\left(x^3-y^3\right)+(y-x)\left(z^3-y^3\right)$

$= (z-y)(x-y)\left(x^2+xy+y^2\right)+(y-x)(z-y)\left(z^2+yz+y^2\right)$

$= (z-y)(x-y)\left(x^2+xy+y^2-z^2-yz-y^2\right)$

$= (z-y)(x-y)\left(x^2-z^2+xy-yz\right)=(z-y)(x-y)(x-z)(x+y+z)$

Bài 14: Phân tích đa thức thành nhân tử: $\left(x^2+y^2+z^2\right)(x+y+z)^2+(xy+yz+zx)^2$

HD:

Ta có: $\left(x^2+y^2+z^2\right)\left[\left(x^2+y^2+z^2\right)+2(xy+yz+zx)\right]+(xy+yz+zx)^2$

Đặt: $x^2+y^2+z^2=a, xy+yz+zx=b$ khi đó đa thức:

$a(a+2b)+b^2$

$=a^2+2ab+b^2=(a+b)^2=\left(x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx\right)^2$

Bài 15: Phân tích đa thức thành nhân tử:

$2\left(x^4+y^4+z^4\right)-\left(x^2+y^2+z^2\right)^2-2\left(x^2+y^2+z^2\right)(x+y+z)^2+(x+y+z)^4$

HD:

Đặt: $x^4+y^4+z^4=a, x^2+y^2+z^2=b, x+y+z=c,$

Khi đó ta có:

$2a-b^2-2bc^2+c^4=2a-2b^2+b^2-2bc^2+c^4=2\left(a-b^2\right)+\left(b-c^2\right)^2$,

Lại có :

$a-b^2=-2\left(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2\right)$ và $b-c^2=-2\left(xy+yz+zx\right)$,

Thay vào ta được : $-4\left(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2\right)+4\left(xy+yz+zx\right)^2=8xyz\left(x+y+z\right)$

Bài 16: Phân tích đa thức thành nhân tử: $-c^2\left(a-b\right)+b^2\left(a-c\right)-a^2\left(b-c\right)$

HD :

Ta có : $-c^2\left(a-b\right)+b^2\left[\left(a-b\right)+\left(b-c\right)\right]-a^2\left(b-c\right)$

= $-c^2\left(a-b\right)+b^2\left(a-b\right)+b^2\left(b-c\right)-a^2\left(b-c\right)$

= $\left(a-b\right)\left(b-c\right)\left(b+c\right)+\left(b-c\right)\left(b-a\right)\left(b+a\right)$

= $\left(a-b\right)\left(b-c\right)\left(b+c-a-b\right)=\left(a-b\right)\left(b-c\right)\left(c-a\right)$

Bài 17: Phân tích đa thức thành nhân tử: $\left(x-y\right)z^3+\left(y-z\right)x^3+\left(z-x\right)y^3$

HD :

Ta có : $z^3\left(x-y\right)+x^3\left[-\left(x-y\right)-\left(z-x\right)\right]+y^3\left(z-x\right)$

= $z^3\left(x-y\right)-x^3\left(x-y\right)+y^3\left(z-x\right)-x^3\left(z-x\right)$

= $\left(x-y\right)\left(z^3-x^3\right)+\left(z-x\right)\left(y^3-x^3\right)$

= $\left(x-y\right)\left(z-x\right)\left(z^2+zx+x^2\right)+\left(z-x\right)\left(y-x\right)\left(y^2+xy+x^2\right)$

= $\left(x-y\right)\left(z-x\right)\left(z^2+zx+x^2-y^2-xy-x^2\right)=\left(x-y\right)\left(z-x\right)\left(z-y\right)\left(z+y-x\right)$

Bài 18: Phân tích đa thức thành nhân tử: $ab\left(a+b\right)-bc\left(b+c\right)-ac\left(c-a\right)$

HD :

Ta có : $ab\left(a+b\right)-bc\left[\left(a+b\right)+\left(c-a\right)\right]-ac\left(c-a\right)$

= $ab\left(a+b\right)-bc\left(a+b\right)-bc\left(c-a\right)-ac\left(c-a\right)$

= $b\left(a+b\right)\left(a-c\right)-c\left(c-a\right)\left(b+a\right)=\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(a-c\right)$

Bài 19: Phân tích đa thức thành nhân tử: $\left(x-y\right)-x^3\left(1-y\right)+y^3\left(1-x\right)$

HD :

Ta có : $\left(x-y\right)-x^3\left[\left(x-y\right)+\left(1-x\right)\right]+y^3\left(1-x\right)$

= $\left(x-y\right)-x^3\left(x-y\right)-x^3\left(1-x\right)+y^3\left(1-x\right)$

= $\left(x-y\right)\left(1-x^3\right)-\left(1-x\right)\left(x^3-y^3\right)$

$= (x-y)(1-x)(1+x+x^2)-(1-x)(x-y)(x^2+xy+y^2)$

$= (x-y)(1-x)(1+x+x^2-x^2-xy-y^2) = (x-y)(1-x)(1-y)(x+y+1)$

Bài 20: Phân tích đa thức thành nhân tử: $4a^2b^2(2a+b)+b^2c^2(c-b)-4c^2a^2(2a+c)$

HD :

Ta có : $4a^2b^2(2a+b)+b^2c^2[(2a+c)-(2a+b)]-4c^2a^2(2a+c)$

$= 4a^2b^2(2a+b)+b^2c^2(2a+c)-b^2c^2(2a+b)-4c^2a^2(2a+c)$

$= b^2(2a+b)(4a^2-c^2)+c^2(2a+c)(b^2-4a^2)$

$= b^2(2a+b)(2a-c)(2a+c)-c^2(2a+c)(2a-b)(2a+b)$

$= (2a+c)(2a+b)(2ab^2-b^2c-2ac^2+bc^2)$

$= (2a+c)(2a+b)(b-c)(2ab+2ac-bc)$

Bài 21: Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^3(y-z)+y^3(z-x)+z^3(x-y)$

HD :

Ta có : $z^3(x-y)+x^3[-(x-y)-(z-x)]+y^3(z-x)$

$= z^3(x-y)-x^3(x-y)+y^3(z-x)-x^3(z-x)$

$= (x-y)(z^3-x^3)+(z-x)(y^3-x^3)$

$= (x-y)(z-x)(z^2+zx+x^2)+(z-x)(y-x)(y^2+xy+x^2)$

$= (x-y)(z-x)(z^2+zx+x^2-y^2-xy-x^2) = (x-y)(z-x)(z-y)(z+y-x)$

Bài 22: Phân tích đa thức thành nhân tử: $bc(a+d)(b-c)-ac(b+d)(a-c)+ab(c+d)(a-b)$

HD :

Ta có : $bc(ab-ac+bd-dc)-ac(ab-bc+ad-dc)+ab(ac-bc+ad-bd)$

$= bc(ab-ac+bd-dc)-ac[(ab-ac+bd-dc)+(ac-bc+ad-bd)]+ab(ac-bc+ad-bd)$

$= (ab-ac+bd-dc)(bc-ac)-(ac-bc+ad-bd)(ac-ab)$

$= (a+d)(b-c)c(b-a)-(c+d)(a-b)a(c-b)$

$= (b-c)(b-a)(ac+dc-ca-ad) = (b-c)(b-a)(c-a).d$

Bài 23: Phân tích đa thức thành nhân tử: $(a-x)y^3-(a-y)x^3+(x-y)a^3$

HD :

Ta có : $y^3(a-x)-x^3[(a-x)+(x-y)]+a^3(x-y)$

$= y^3(a-x)-x^3(a-x)-x^3(x-y)+a^3(x-y)$

$= (a-x)(y^3-x^3)-(x-y)(x^3-a^3)$

$= (x-a)(x-y)(x^2+xy+y^2)-(x-y)(x-a)(x^2+xa+a^2)$

$= (x-a)(x-y)(x^2+xy+y^2-x^2-xa-a^2)$

$= (x-a)(x-y)(y-a)(y+a+x)$

Bài 24: Phân tích đa thức thành nhân tử: $A=(x^2+y^2+z^2)(x+y+z)^2+(xy+yz+zx)^2$

HD :

Ta có :

$A=(x^2+y^2+z^2)(x+y+z)^2+(xy+yz+zx)^2=\left[(x^2+y^2+z^2)+2(xy+yz+zx)\right](x^2+y^2+z^2)$
$+(xy+yz+zx)^2$

Đặt $x^2+y^2+z^2=a; xy+yz+zx=b \Rightarrow A=(a+b)^2=(x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx)^2$

Bài 25: Phân tích đa thức thành nhân tử:

$$A=2(x^4+y^4+z^4)-(x^2+y^2+z^2)^2-2(x^2+y^2+z^2)(x+y+z)^2+(x+y+z)^4$$

HD :

Đặt $x^4+y^4+z^4=a; x^2+y^2+z^2=b; x+y+z=c$ ta được :

$A=2a-b^2-2bc^2+c^4=2a-2b^2+b^2-2bc^2+c^4=2(a-b)^2+(b-c^2)^2$

Lại có : $a-b^2=-2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2); b-c^2=-2(xy+yz+zx)$

Do đó :

$A=-4(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)+4(xy+yz+zx)^2=-4x^2y^2-4y^2z^2-4z^2x^2+4x^2y^2+4y^2z^2+4z^2x^2$

Bài 26: Phân tích đa thức thành nhân tử: $A=(a+b+c)^3-4(a^3+b^3+c^3)-12abc$

HD :

Đặt $a+b=m, a-b=n \Rightarrow 4ab=m^2-n^2; a^3+b^3=(a+b)\left[(a-b)^2+ab\right]=m\left(n^2+\dfrac{m^2-n^2}{4}\right)$

$\Rightarrow A=(m+c)^3-4.\dfrac{m^3+3mn^2}{4}-4c^3-3c(m^2-n^2)=3(-c^3+mc^2-mn^2+cn^2)$

$=3(m-c)(c-n)(c+n)=3(a+b+c)(c+a-b)(c-a+b)$

Bài 27: Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^2y+xy^2+xz^2+yz^2+x^2z+y^2z+2xyz$

HD :

Ta có: $=xy(x+y)+z^2(x+y)+z(x+y)^2=(x+y)(xy+z^2+xz+yz)=(x+y)(y+z)(z+x)$

Bài 28: Phân tích đa thức thành nhân tử: $A=ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)$

HD :

Đặt $x=a-b; y=b-c\rightarrow x+y=a-c$

$A=abx+bcy-ca(x+y)=ax(b-c)-cy(a-b)=axy-cxy=xy(a-c)=(a-b)(b-c)(c-a)$

Bài 29: Phân tích đa thức thành nhân tử: $B=(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3$

HD :

Đặt $x=a-b; y=b-c\rightarrow x+y=a-c$

$B=x^3+y^3-(x+y)^3=x^3+y^3-x^3-3xy(x+y)-y^3=-3xy(x+y)=3(a-b)(b-c)(c-a)$

Bài 30: Phân tích đa thức thành nhân tử: $C=a(b-c)^3+b(c-a)^3+c(a-b)^3$

HD :

Đặt $x=a-b; y=b-c\rightarrow x+y=a-c$

$C=ay^3-b(x+y)^3+cx^3=ay^3-b\left[x^3+y^3+3xy(x+y)\right]+cx^3=y^3(a-b)-x^3(b-c)-3bxy(x+y)$
$=xy^3-x^3y-3bxy(x+y)=xy(y^2-x^2)-3bxy(x+y)=xy(x+y)(y-x-3b)=xy(x+y)(b-c-a+b-3b)$
$=-xy(x+y)(a+b+c)=(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$

Bài 31: Phân tích đa thức thành nhân tử: $D=(a-b)^5+(b-c)^5+(c-a)^5$

HD :

Đặt $x=a-b; y=b-c\rightarrow x+y=a-c$

Ta có:

$(x+y)^5=(x+y)(x+y)^4=(x+y)(x^2+2xy+y^2)^2=(x+y)(x^4+4x^2y^2+y^4+4x^3y+4xy^3+2x^2y^2)$
$=(x+y)(x^4+y^4)+(x+y)(4x^3y+6x^2y^2+4xy^3)=x^5+y^5+xy(x^3+y^3)+xy(x+y)(4x^2+6xy+4y^2)$
$=x^5+y^5+xy(x+y)(5x^2+5xy+5y^2)=x^5+y^5+5xy(x+y)(x^2+xy+y^2)$
$\rightarrow D=x^5+y^5-(x+y)^5=x^5+y^5-\left[x^5+y^5+5xy(x+y)(x^2+xy+y^2)\right]=-5xy(x+y)(x^2+xy+y^2)$
$=5(a-b)(b-c)(c-a)\left[(a-b)^2+(a-b)(b-c)+(b-c)^2\right]=5(a-b)(b-c)(c-a)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

Bài 32: Phân tích đa thức thành nhân tử: $A=a(b^3-c^3)+b(c^3-a^3)+c(a^3-b^3)$

HD :

Đặt

$x=a^3-b^3; y=b^3-c^3 \Leftarrow x+y=a^3-c^3 \to A=ay-b(x+y)+cx=y(a-b)-x(b-c)$
$=(b^3-c^3)(a-b)-(a^3-b^3)(b-c)=(b-c)(a-b)(b^2+bc+c^2-a^2-ab-b^2)$
$=(b-c)(a-b)(bc-ab+c^2-a^2)=(b-c)(a-b)(c-a)(a+b+c)$

Bài 33: Phân tích đa thức thành nhân tử: $B=a^3(b^2-c^2)+b^3(c^2-a^2)+c^3(a^2-b^2)$

HD :

Đặt

$x=a^2-b^2; y=b^2-c^2 \to x+y=a^2-c^2$
$B=a^3y-b^3(x+y)+c^3x=y(a^3-b^3)-x(b^3-c^3)=(b^2-c^2)(a^3-b^3)-(a^2-b^2)(b^3-c^3)$
$=(b-c)(a-b)\left[(b+c)(a^2+ab+b^2)-(a+b)(b^2+bc+c^2)\right]=b(a^2+ab+b^2-b^2-bc-c^2)$
$+(a^2c+abc+b^2c-ab^2-abc-ac^2)=b(a-c)(a+b+c)+\left[ac(a-c)-b^2(a-c)\right]$
$=(a-c)(ab+b^2+bc+ac-b^2)=(a-c)(ab+bc+ca) \to B=(a-b)(b-c)(a-c)(ab+bc+ca)$

Bài 34: Phân tích đa thức thành nhân tử: $A=(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3$

HD :

Đặt

$m=a+b+c \to A=m^3-a^3-(b^3+c^3)=(m-a)(m^2+ma+a^2)-(b+c)(b^2-bc+c^2)$
$=(b+c)(m^2+ma+a^2-b^2+bc-a^2)=(b+c)\left[(m^2-b^2)+(a^2-c^2)+(ma+bc)\right]$
$=(b+c)\left[(m-b)(m+b)+(a-c)(a+c)+(a+b)(a+c)\right]=(b+c)(a+c)(m+b+a-c+a+b)$
$=3(b+c)(c+a)(a+b)$

Bài 35: Phân tích đa thức thành nhân tử: $B=x(x+2y)^3-y(y+2x)^3$

HD :

Đặt $m=x+y$

$B=x(m+y)^3-y(m+x)^3=x\left[m^3+3my(m+y)+y^3\right]-y\left[m^3+3mx(m+x)+x^3\right]$
$=m^3(x-y)-xy(x^2-y^2)-3mxy(m+x-m-y)=(x-y)(m^3-xy(x+y)-3mxy)$
$=m(x-y)(m^2-4xy)=m(x-y)\left[(x+y)^2-4xy\right]=m(x-y)^3=(x+y)(x-y)^3$

Bài 36: Phân tích đa thức thành nhân tử: $C=x^4+(x+y)^4+y^4$

HD :

.

Đặt: $m=x+y$

$C=(m-y)^4+m^4+y^4=m^4-4m^3y+6m^2y^2-4my^3+y^4+m^4+y^4=2(m^4+2m^2y^2+y^4)-4my(m^2+y^2)+2m^2y^2$
$=2(m^2+y^2-my)^2=2\left[(x+y)^2+y^2-(x+y)y\right]^2=2(x^2+xy+y^2)^2$

Bài 37: Phân tích đa thức thành nhân tử: $D=a^4+b^4+c^4-2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$

HD :

Đặt: $m = a^2 + b^2 + c^2$

$D = (a^2+b^2+c^2)^2 - 4(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2) = m^2 - 4\left[b^2(a^2+c^2)+c^2a^2\right] = m^2 - 4\left[b^2(m-b^2)+c^2a^2\right]$

$= (m-2b^2)^2 - (2ca)^2 = (m-2b^2-2ca)(m-2b^2+2ca) = (a^2+b^2+c^2-2b^2-2ca)(a^2+b^2+c^2-2b^2+2ca)$

$= \left[(a-c)^2-b^2\right]\left[(a+c)^2-b^2\right] = (a-c-b)(a-c+b)(a+c-b)(a+b+c)$

Bài 38: Phân tích đa thức thành nhân từ:

$$A = a(b+c-a)^2 + b(c+a-b)^2 + c(a+b-c)^2 + (b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$$

HD :

Đặt $m = x+y+z; a+b-c = x; b+c-a = y; c+a-b = z \rightarrow 2a = y+z; 2b = z+x; 2c = x+y$

$2A = (y+z)x^2 + (x+z)y^2 + (y+x)z^2 + 2xyz = xy(x+y) + yz(y+z) + zx(z+x) + 2xyz$

$= xy(m-z) + yz(m-x) + zx(m-y) + 2xyz = m(xy+yz+zx) - xyz = (x+y)(y+z)(z+x) = 8abc \Rightarrow A = 4abc$

Bài 39: Phân tích đa thức thành nhân từ: $B = (a+b+c)^3 - (a+b-c)^3 - (b+c-a)^3 - (c+a-b)^3$

HD :

Đặt $a+b-c = z; b+c-a = x; c+a-b = y \rightarrow x+y+z = a+b+c$

$B = (x+y+z)^3 - x^3 - y^3 - z^3 = 3(x+y)(y+z)(z+x) = 3.2c.2a.2b = 24abc$

Bài 40: Phân tích đa thức thành nhân từ: $C = ab(a+b) + b(b+c) + ca(c+a) - a^3 - b^3 - c^3 - 2abc$

HD :

Đặt $a+b-c = z; b+c-a = x; c+a-b = y \rightarrow 2a = y+z; 2b = x+z; 2c = x+y$

Ta có:

$4C = 4a^2(b+c-a) + 4b^2(c+a-b) + 4c^2(a+b-c) - 8abc = (y+z)^2x + (z+x)^2y + (x+y)^2z - (x+y)(y+z)(z+x)$

$= xy(x+y) + yz(y+z) + zx(z+x) - (x+y)(y+z)(z+x) + 6xyz = xy(x+y) + yz(x+y) + zx(x+y)$

$+z^2(x+y) - (x+y)(y+z)(z+x) + 4xyz = (x+y)(xy+yz+zx+z^2) - (x+y)(y+z)(z+x) + 4xyz$

$= (x+y)(y+z)(z+x) - (x+y)(y+z)(z+x) + 4xyz = 4xyz \rightarrow C = xyz = (b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$

Bài 41: Phân tích đa thức thành nhân tử: $A = x^2y^2(y - x) + y^2x^2(z - y) - z^2x^2(z - x)$

Cách 1: Khai triển hai trong ba số hạng, chẳng hạn khai triển hai số hạng đầu rồi nhóm các số hạng làm xuất hiện thừa số chung z - x

$A = x^2y^3 - x^3y^2 + y^2z^3 - y^3z^2 - z^2x^2(z - x)$

$= y^2(z^3 - x^3) - y^3(z^2 - x^2) - z^2x^2(z - x)$

$= y^2(z - x)(z^2 + zx + x^2) - y^3(z - x)(z + x) - z^2x^2(z - x)$

$= (z - x)(y^2z^2 + y^2zx + x^2y^2 - y^3z - y^3x - z^2x^2)$

$= (z - x)[y^2z(z - y) - x^2(z - y)(z + y) + y^2x(z - y)$

$= (z - x)(z - y)(y^2z - x^2z - x^2y + y^2x)$

$= (z - x)(z - y)[z(y - x)(y + x) + xy(y - x)]$

$= (z - x)(z - y)(y - x)(xy + xz + yz).$

Cách 2: Để ý rằng: $(z - y) + (y - x) = (z - x)$. Do vậy ta có:

$A = x^2y^2(y - x) + y^2z^2(z - y) - z^2x^2[(z - y) + (y - x)]$

$= x^2y^2(y - x) + y^2z^2(z - y) - z^2x^2(z - y) - z^2x^2(y - x)$

$= (y - x)(x^2y^2 - z^2x^2) + (z - y)(y^2z^2 - z^2x^2)$

$= (y - x)x^2(y - z)(y + z) + (z - y)z^2(y - x)(y + x)$

$= (y - x)(z - y)(- x^2y - x^2z + yz^2 + xz^2)$

$= (y - x)(z - y)[xz(z - x) + y(z - x)(z + x)]$

$= (y - x)(z - y)(z - x)(xz + yz + xy)$

Bài 42. Phân tích đa thức thành nhân tử: $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

HD:

Các hạng tử của đa thức đa thức đã cho không chứa thừa số chung, không có dạng một hằng đẳng thức đáng nhớ nào, cũng không thể nhóm các số hạng. Do vậy ta phải biến đổi đa thức bằng cách thêm bớt cùng một hạng tử để có thể vận dụng được các phương pháp phân tích đã biết.

$a^3 + b^3 + c^3 = (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) + c^3 - (3a^2b + 3ab^2 + 3abc)$

$= (a + b)^3 + c^3 - 3ab(a + b + c)$

$= (a + b + c)[(a + b)^2 - (a + b)c + c^2 - 3ab]$

$= (a + b + c)(a^2 + 2ab + b^2 - ac - bc + c^2 - 3ab]$

$= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$

Bài 43. Phân tích đa thức thành nhân tử: $(x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3$

HD:

Cách 1: Đặt x – y = a , y – z = b, z – x = c thì a + b + c = 0.

Khi đó theo câu a ta có: $a^3 + b^3 + c^3 – 3abc = 0$ hay $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

Vậy: $(x – y)^3 + (y – z)^3 + (z – x)^3 = 3(x – y)(y – z)(z – x)$

Cách 2: Để ý rằng: $(a + b)^3 = a^3 + 3ab(a + b) + b^3$ và (y – z) = (y – x) + (x – z)

$(x – y)^3 + (y – z)^3 + (z – x)^3$

$= [(y – x) + (x – z)]^3 + (z – x)^3 + (x – y)^3$

$= (y – x)^3 + 3(y – x)(x – z)\{(y – x) + (x – z)] + (x – z)^3 – (x – z)^3 – (y – x)^3$

Bài 44: Phân tích đa thức thành nhân tử. $4x(x + y)(x + y + z)(x + z) + y^2z^2$

HD

$4x(x + y)(x + y + z)(x + z) + y^2z^2$

$= 4x(x + y + z)(x + y)(x + z) + y^2z^2$

$= 4(x^2 + xy + xz)(x^2 + xz + xy + yz) + y^2z^2$

Đặt: $x^2 + xy + xz = m$, ta có

$4x(x + y)(x + y + z)(x + y) + y^2x^2 = 4m(m + yz) + y^2z^2$

$= 4m^2 + 4myz + y^2z^2$

$= (2m + yz)^2$

Thay $m = x^2 + xy + xz$, ta được:

$4x(x + y)(x + y + z)(x + z) + y^2z^2 = (2x^2 + 2xy + 2xz + yz)^2$

Bài 45: Phân tích đa thức thành nhân tử: $2a^2b + 4ab^2 – a^2c + ac^2 – 4b^2c + 2bc^2 – 4abc$.

HD

Ta có : $2a^2b + 4ab^2 – a^2c + ac^2 – 4b^2c + 2bc^2 – 4abc$

$= 2a^2b + 4ab^2 – a^2c – 2abc + ac^2 + 2bc^2 – 4b^2c – 2abc$

$= 2ab(a + 2b) – ac(a + 2b) + c^2(a + 2b) – 2bc(a + 2b)$

$=(a+2b)(2ab-ac+c^2-2bc)$

$=(a+2b)[a(2b-c)-c(2b-c)]$

$=(a+2b)(2b-c)(c-a)$

Bài 46: Phân tích thành nhân tử:

a) $(a+b+c)^2+(a-b+c)^2-4b^2$; b) $a(b^2-c^2)-b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)$

c) $(a^2+b^2)^3+(c^2-a^2)^3-(b^2+c^2)^3$

HD:

a) $(a+b+c)^2+(a-b+c)^2-4b^2=(a+b+c)^2+(a-b+c+2b)(a-b+c-2b)$

$=(a+b+c)^2+(a+b+c)(a-3b+c)=(a+b+c)(a+b+c+a-3b+c)$

$=2(a+b+c)(a-b+c)$

b) $a(b^2-c^2)-b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)=ab^2-ac^2-bc^2+ab^2+ac^2-b^2c$

$=ab(a+b)-c^2(a+b)+c(a+b)(a-b)=(a+b)(ab-c^2+ca-cb)$

$=(a+b)(b+c)(a-c)$

c) $(a^2+b^2)^3+(c^2-a^2)^3-(b^2+c^2)^3=(a^2+b^2)^3+(c^2-a^2)^3+(-b^2-c^2)^3$

C/m: Nếu $x+y+z=0$ thì $x^3+y^3+z^3=3xyz$ (tự giải)

Ta có: $(a^2+b^2)+(c^2-a^2)+(-b^2-c^2)=0$

Suy ra $(a^2+b^2)^3+(c^2-a^2)^3-(b^2+c^2)^3=(a^2+b^2)^3+(c^2-a^2)^3+(-b^2-c^2)^3$

$=3(a^2+b^2)(c^2-a^2)(-b^2-c^2)$

$=3(a^2+b^2)(b^2+c^2)(a+c)(a-c)$

Bài 47: Phân tích đa thức thành nhân từ: $a(b+c)^2+b(a+c)^2+c(a+b)^2-4abc$

Bài 48: Phân tích đa thức thành nhân từ: $a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)+2abc$

Bài 49: Phân tích đa thức thành nhân từ: $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$

Bài 50: Phân tích đa thức thành nhân từ: $abc-(ab+bc+ca)+(a+b+c-1)$

Bài 51 : Phân tích thành nhân tử: $x^2y+xy^2+xz^2+yz^2+x^2z+y^2z+2xyz$

HD:

Ta có: $=xy(x+y)+z^2(x+y)+z(x+y)^2=(x+y)(xy+z^2+xz+yz)$

$=(x+y)(y+z)(z+x)$

Dạng 5: hệ số bất định

Bài 1: Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^4-6x^3+12x^2-14x+3$

HD :

Ta có : $x^4-6x^3+12x^2-14x+3=(x^2+ax+1)(x^2+bx+3)$

Hoặc : $x^4-6x^3+12x^2-14x+3=(x^2+ax-1)(x^2+bx-3)$

Giả sử ở TH1 ta có :

$x^4-6x^3+12x^2-14x+3=x^4+(a+b)x^3+(4+ab)x^2+(3a+b)x+3$

Đồng nhất hệ số ta có:

$\begin{cases}a+b=-6\\4+ab=12\\3a+b=-14\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-4\\b=-2\end{cases}$, Vậy $x^4-6x^3+12x^2-14x+3=(x^2-4x+1)(x^2-2x+3)$

Bài 2: Phân tích đa thức thành nhân tử: $2x^4-3x^3-7x^2+6x+8$

HD:

Cách 1: Ta nhận thấy đa thức có 1 nhân tử là x + 1

$Q(x)=2x^4-3x^3-7x^2+6x+8=(x+1)(2x^3+ax^2+bx+c)=2x^4+(a+2)x^3+(a+b)x^2+(b+c)x+c$

$\begin{cases}a+2=-3\\a+b=-7\\b+c=6\\c=8\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-5\\b=-2\\c=8\end{cases}\Rightarrow Q(x)=(x+1)(x-2)(2x^2-x-4)$

Cách 2: Giả sử

$Q(x)=(2x^2+ax+b)(x^2+cx+d)=2x^4+(2c+a)x^3+(2d+ac+b)x^2+(ad+bc)x+bd$

Đồng nhất các hệ số: $\begin{cases}2c+a=-3\\2d+ac+b=-7\\ad+bc=6\\bd=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=-2\\d=-4\\a=c=-1\end{cases}\Rightarrow Q(x)=(2x^2-x-4)(x+1)(x-2)$

Cách 3: Ta có: $2x^4-3x^3-7x^2+6x+8=2x^4+2x^3-5x^3-5x^2-2x^2-2x+8x+8$

$=2x^3(x+1)-5x^2(x+1)-2x(x+1)+8(x+1)$

$=(x+1)(2x^3-5x^2-2x+8)=(x+1)(x-2)(2x^2-x-4)$

Bài 3: Phân tích đa thức thành nhân tử: $12x^2+5x-12y^2+12y-10xy-3$

HD:

$12x^2+5x-12y^2+12y-10xy-3=(ax+by+3)(cx+dy-1)$

$=acx^2+(3c-a)x+bdy^2+(3d-b)y+(bc+ad)xy-3$

$\Rightarrow\begin{cases}ac=12\\bc+ad=-10\\3c-a=5\\bd=-12\\3d-b=12\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=4\\c=3\\b=-6\\d=2\end{cases}$

$\Rightarrow 12x^2+5x-12y^2+12y-10xy-3=(4x-6y+3)(3x+2y-1)$

Bài 4: Phân tích đa thức thành nhân tử: $P(x)=2x^4-7x^3+17x^2-20x+14$

HD: $\begin{cases}2b+n=-7\\2c+p+bn=17\\cn+bp=-20\\cp=14\Rightarrow c=2;p=7(tm)\Rightarrow b=-2;n=-3\end{cases}$

Bài 5: Phân tích đa thức thành nhân tử: $R(x)=4x^4+4x^3+5x^2+2x+1$

HD: $=(2x^2+x+1)^2$

Bài 6: Phân tích đa thức thành nhân tử: $T(x,y)=2x^2-7xy+6y^2+9x-13y-5$

HD: $T(x,y)=(2x+by+c)(x+ny+p)\Rightarrow n=-2,b=-3,c=-1,p=5$

Baøi 7: Phaân tích ña thöùc thaønh nhaân töû.

a) $x^3 - 19x - 30$ b) $x^4 + 6x^3 + 7x^2 + 6x + 1$

HD:

a)Kết quả tìm phải có dạng: $(x + a)(x^2 + bx + c) = x^3 + (a + b)x^2 + (ab + c)x + ac$.

Ta phải tìm a, b, c thoả mãn: $x^3 - 19x - 30 = x^3 + (a + b)x^2 + (ab + c)x + ac$

Vì hai đa thức này đồngnhất , nên ta có:

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ ab + c = 19 \\ ac = -30 \end{cases}$$

Vì a,c thuộc số nguyên vá tích ac = - 30, do đó a, c là ước của - 30

hay a,c $\in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 5, \pm 6, \pm 10, \pm 15, \pm 30\}$

a = 2, c = 15 khi đó b = - 2 thoả mãn hệ trên. Đó là một bộ số phải tìm

tức là $x^3 - 19x - 30 = (x + 2)(x^2 - 2x - 15)$

b) Dễ thấy ±1 không phải là nghiệm của đa thức trên nên đa thức không có nghiệm nguyên, cũng không có nghiệm hữu tỉ. Như vậy nến đa thức đã cho phân tích thành nhân tử thì phải có dạng:

$(x^2 + ax + b)(x2 + cx + d) = x^4 + (a + c)x^3 + (ac + b + d)x^2 + (ad + bc)x + bd$.

Đồng nhất đa thức này với đa thức đã cho, ta có

$x^4 + 6x^3 + 7x^2 + 6x + 1 = x^4 + (a + c)x^3 + (ac + b + d)x^2 + (ad + bc)x + bd$

$$\begin{cases} a + c = 6 \\ ac + b + d = 7 \\ ad + bc = 6 \\ bd = 1 \end{cases}$$

Từ hệ này tìm được: a = b = d = 1 , c = 5

Vậy: $x^4 + 6x^3 + 7x^2 + 6x + 1 = (x^2 + x + 1)(x^2 + x + 5)$.

Bài 8: Phân tích đa thức thành nhân tử: $12x^2+5x-12y^2+12y-10xy-3$

HD:

Ta có: $12x^2+5x-12y^2+12y-10xy-3 = (ax+by+3)(cx+dy-1)$

$= 12x^2+5x-12y^2+12y-10xy-3 = acx^2+(ad+bc)xy+bdy^2+(3c-a)x+(3d-b)y-3$

Đồng nhất hệ số ta có:

$$\begin{cases} ac=12 \\ ad+bc=-10 \\ bd=-12 \\ 3c-a=5 \\ 3d-b=12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=-6 \\ c=3 \\ d=2 \end{cases}$$, Vậy $12x^2+5x-12y^2+12y-10xy-3=(4x-6y+3)(3x+2y-1)$

Bài 9: Phân tích đa thức thành nhân tử: $(x^2+y^2+xy)^2-x^2y^2-y^2z^2-z^2x^2$

HD:

$(x^2+y^2+xy)^2-x^2y^2-y^2z^2-z^2x^2 = x^4+y^4+x^2y^2+2x^2y^2+2xy^3+2x^3y-x^2y^2-y^2z^2-z^2x^2$

$= x^4+y^4+2x^2y^2+2xy(x^2+y^2)-z^2(x^2+y^2)$

$= (x^2+y^2)^2+2xy(x^2+y^2)-z^2(x^2+y^2)$

$= (x^2+y^2)(x^2+y^2+2xy-z^2) = (x^2+y^2)[(x+y^2)-z^2]$

$= (x^2+y^2)(x+y+z)(x+y-z)$

Bài 10: Phân tích đa thức thành nhân tử: $81x^4(z^2-y^2)-z^2+y^2$

HD:

Ta có: $81x^4(z^2-y^2)-z^2+y^2 = 81x^4(z^2-y^2)-(z^2-y^2)$

$= (z^2-y^2)(81x^4-1) = (z-y)(z+y)(9x^2-1)(9x^2+1)$

$= (z-y)(z+y)(3x+1)(3x-1)(9x^2+1)$

Bài 11: Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^6+x^4+x^2y^2+y^4-y^6$

HD:

Ta có: $x^6+x^4+x^2y^2+y^4-y^6$

$= x^6-y^6+x^4+2x^2y^2+y^4-x^2y^2 = (x^3)^2-(y^3)^2+(x^2+y^2)^2-x^2y^2$

$= \left(x^3-y^3\right)\left(x^3+y^3\right)+\left(x^2+y^2-xy\right)\left(x^2+y^2+xy\right)$

$= \left(x-y\right)\left(x^2+xy+y^2\right)\left(x+y\right)\left(x^2-xy+y^2\right)+\left(x^2+y^2-xy\right)\left(x^2+y^2+xy\right)$

$= \left(x^2+y^2+xy\right)\left(x^2+y^2-xy\right)\left(x^2-y^2+1\right)$

Bài 12: Phân tích đa thức thành nhân tử: $4x^4+4x^3+5x^2+2x+1$

HD:

Ta có: $4x^4+4x^3+5x^2+2x+1=\left(ax^2+bx+1\right)\left(cx^2+dx+1\right)$

Đồng nhất hết số ta có:

$4x^4+4x^3+5x^2+2x+1=\left(2x^2+x+1\right)^2$

Bài 13: Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^4+8x+63$

HD:

Ta có: $x^4+8x+63=\left(x^2+ax+b\right)\left(x^2+cx+d\right)$

Đồng nhất hệ số ta có:

$x^4+8x+63=\left(x^2-4x+7\right)\left(x^2+4x+9\right)$

Bài 14: Phân tích đa thức thành nhân tử: $\left(x+1\right)^4+\left(x^2+x+1\right)^2$

HD:

Ta có: $\left(x+1\right)^4+\left(x^2+x+1\right)^2=\left(x+1\right)^4+\left[x\left(x+1\right)+1\right]^2$

$= \left(x+1\right)^4+x^2\left(x+1\right)^2+2x\left(x+1\right)+1$

$= \left(x+1\right)^2\left[\left(x+1\right)^2+x^2\right]+\left(2x^2+2x+1\right)$

$= \left(2x^2+2x+1\right)\left[\left(x+1\right)^2+1\right]$

$= \left(x^2+2x+2\right)\left(2x^2+2x+1\right)$

Bài 15: Phân tích đa thức thành nhân tử: $\left(x+y\right)^5-x^5-y^5$

HD:

Ta có: $\left(x+y\right)^5=x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+y^5-x^5-y^5$

$=5xy\left(x^3+2x^2y+2xy^2+y^3\right)$

$= 5xy\left[\left(x+y\right)\left(x^2-xy+y^2\right)+2xy\left(x+y\right)\right]$

$= 5xy\left(x+y\right)\left(x^2+y^2+xy\right)$

Bài 16: Phân tích đa thức thành nhân tử: $(x^2+y^2+z^2)(x+y+z)^2-3(xy+yz+zx)^2$

HD:

Ta có $(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$

Đặt $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a \\ xy+yz+zx=b \end{cases} \Rightarrow A = a(a+2b).3b^2 = a^2+2ab-3b^2 = (a-b)(a+3b)$

$\Rightarrow A = (x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)[(x^2+y^2+z^2++3(xy+yz+zx)]$

Bài 17: Phân tích đa thức thành nhân tử: $(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3$

HD:

Ta đã biết: Nếu $a+b+c=0 \Rightarrow a^3+b^3+c^3=3abc$

Đặt $\begin{cases} x-y=a \\ y-z=b \\ z-x=c \end{cases} \Rightarrow a+b+c=0 \Rightarrow B=a^3+b^3+c^3 \Rightarrow B=3abc=3(x-y)(y-z)(z-x)$

Bài 18: Phân tích đa thức thành nhân tử: $(x^3-y^3)^3+(y^3+z^3)^3-(z^3+x^3)^3$

HD:

$\begin{cases} x^3-y^3=a \\ y^3+z^3=b \\ -x^3-z^3=c \end{cases} \Rightarrow a+b+c=0 \Rightarrow B=a^3+b^3+c^3 \Rightarrow B=3abc=3(x^3-y^3)(y^3+z^3)(-z^3-x^3)$

Bài 19: Phân tích đa thức thành nhân tử: $(a+b)^3+(b+c)^3+(c+a)^3-8(a+b+c)^3$

HD:

Đặt $\begin{cases} a+b=x \\ b+c=y \\ c+a=z \end{cases} \Rightarrow x+y+z=2(a+b+c) \Rightarrow (x+y+z)^3=8(a+b+c)^3$;

$D=x^3+y^3+z^3-(x+y+z)^3$

Ta có: $(x+y+z)^3=x^3+y^3+z^3+3(x+y)(y+z)(z+x) \Rightarrow D=-3(x+y)(y+z)(z+x)=-3....$

Bài 20: Phân tích đa thức thành nhân tử: $(a+b+c)^3-(a+b-c)^3-(b+c-a)^3-(c+a-b)^3$

HD:

Đặt

$\begin{cases} m=a+b-c \\ n=b+c-a \\ p=c+a-b \end{cases} \Rightarrow a+b+c=m+n+p \Rightarrow E=(m+n+p)^3-m^3-n^3-p^3=3(m+n)(n+p)(p+m)$

$\Rightarrow E = 3.2b.2c.2a = 24abc$

Bài 21: Phân tích các đa thức thành nhân tử:

a) $4x^4+4x^3+5x^2+2x+1$; b) $3x^4+11x^3-7x^2-2x+1$

HD:

a) $4x^4+4x^3+5x^2+2x+1$

Ta viết $4x^4+4x^3+5x^2+2x+1=\left(2x^2+ax+1\right).\left(2x^2+bx+1\right)$ với mọi x

$= 4x^4+\left(2a+2b\right)x^3+\left(ab+4\right)x^2+\left(a+b\right)x+1$

Đồng nhất hệ số hai vế, ta được: $2a+2b=4, ab+4=5, a+b=2 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow a=1, b=1$.

Vậy, $4x^4+4x^3+5x^2+2x+1=\left(2x^2+x+1\right)^2$.

b) $3x^4+11x^3-7x^2-2x+1$

Ta viết $3x^4+11x^3-7x^2-2x+1=\left(3x^2+cx+1\right)\left(x^2+dx+1\right)$ với mọi x

$=3x^4+3dx^3+3x^2+cx^3+cdx^2+cx+x^2+dx+1$

$=3x^4+\left(3d+c\right)x^3+\left(4+cd\right)x^2+\left(c+d\right)x+1$

Đồng nhất hệ số hai vế, ta được: $3d+c=11,\ 4+cd=-7, c+d=-2 \Leftrightarrow c,d \in \varnothing$.(loại)

Khi đó, ta chọn cách viết khác $3x^4+11x^3-7x^2-2x+1=\left(3x+m\right)\left(x^3+nx^2+px+q\right)$ với mọi x

$=3x^4+3nx^3+3px^2+3qx+mx^3+mnx^2+mpx+mq$

$=3x^4+\left(3n+m\right)x^3+\left(3p+mn\right)x^2+\left(3q+mp\right)x+mq$

Đồng nhất hệ số hai vế ta được $3n+m=11,\ 3p+mn=-7,\ 3q+mp=-2,\ mq=1$

Xét hai trường hợp:

TH1: $m=q=-1$, giải ra được $n=4, p=-1$ (nhận)

TH2: $m=q=1$, giải ra $n, p \in \varnothing$ (loại)

Vậy, $3x^4+11x^3-7x^2-2x+1=(3x-1)\left(x^3+4x^2-x-1\right)$.

Bài 22: Phân tích đa thức thành nhân tử:

HD:

Bài 23: Tìm tổng hệ số của đa thức sau khi khai triển:

a, $(4x-3)^4$ b, $(5x-2)^5$ c, $\left(x^2+x-2\right)^{100}+\left(x^2+1-x\right)^{2017}$

HD :

Tổng hệ số của đa thức chính là giá trị của đa thức tại x = 1

Bài 24: Tìm hệ số của hạng tử bậc cao nhất và tổng các hệ số của đa thức:

$$\left(3-6x+4x^2\right)^{2005}\left(1-x^2\right)^{2004}.\left(1-2x+3x^2-x^3\right)^{2003}$$